

CIENKOŚCIENNE KONSTRUKCJE METALOWE

Wykład 6: Wymiarowanie elementów cienkościennych o przekroju w ujęciu teorii Własowa

INFORMACJE OGÓLNE

- Ścianki rozważanych elementów, w zależności od smukłości pod naprężeniami ściskającymi lub stycznymi, mogą lub nie mogą tracić stateczność lokalnie.
- Pręty, w zależności od kształtu profili i sposobu podparcia oraz obciążenia, mogą w różny sposób reagować na skutki skręcania. W elementach ściskanych lub zginanych wpływ ten może mieć większe lub mniejsze znaczenie.
- Łączne rozpatrzenie obu czynników przy ocenie nośności elementów jest zagadnieniem złożonym (nieprzydatnym z praktycznego punktu widzenia).
- Rozpatruje się dwie teorie opisujące powyższe zjawiska:
 - A. teoria prętów cienkościennych Własowa (nie uwzględnia lokalnej utraty stateczności),
 - B. teoria nośności nadkrytycznej Wintera (nie uwzględnia skutków skręcania).

GEORGE WINTER I VASILY ZACHAROWICH VLASV



George Winter

ur. 1. kwietnia 1912 w Wiedniu
(Austria)
zm. 3. listopada 1972 w Ithica
(NY, USA)



ВАСИЛИЙ ЗАХАРОВИЧ ВЛАСОВ
(1906—1958)

ur. 24. lutego 1906 w Tarusie
(Rosja)
zm. 7. sierpnia 1958 w Moskwie
(ZSRR)

TEORIA PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH WŁASOWA

Podstawowe założenia:

- hipoteza sztywnego konturu – przekrój pręta odkształconego pod obciążeniem ma taki sam kontur jak przed obciążeniem, może się tylko obracać i przemieszczać w swojej płaszczyźnie, w wyniku skręcania przestaje być płaski i ulega spaczeniu,
- pręt rozpatruje się jako powłokę pryzmatyczną,
- zerowe odkształcenia powierzchni środkowych (dotyczy przekrojów otwartych).

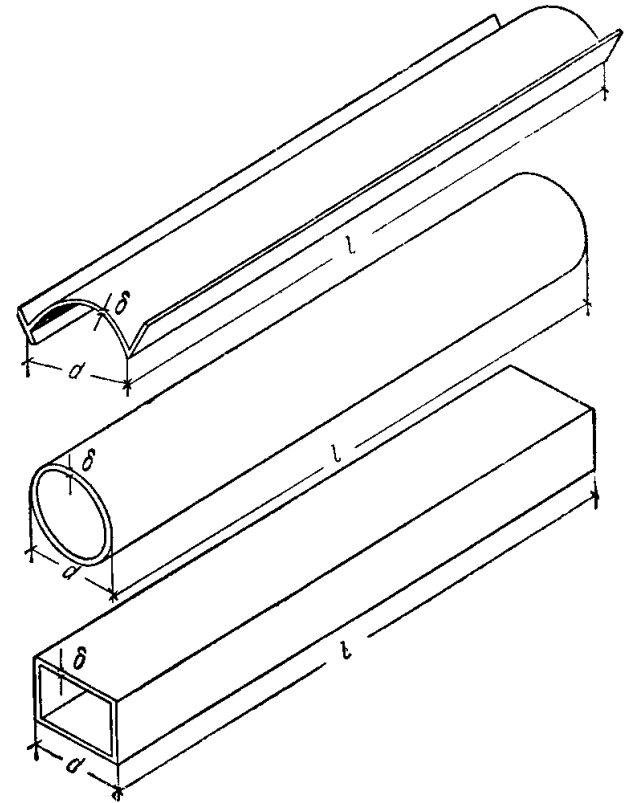


Рис. 1.

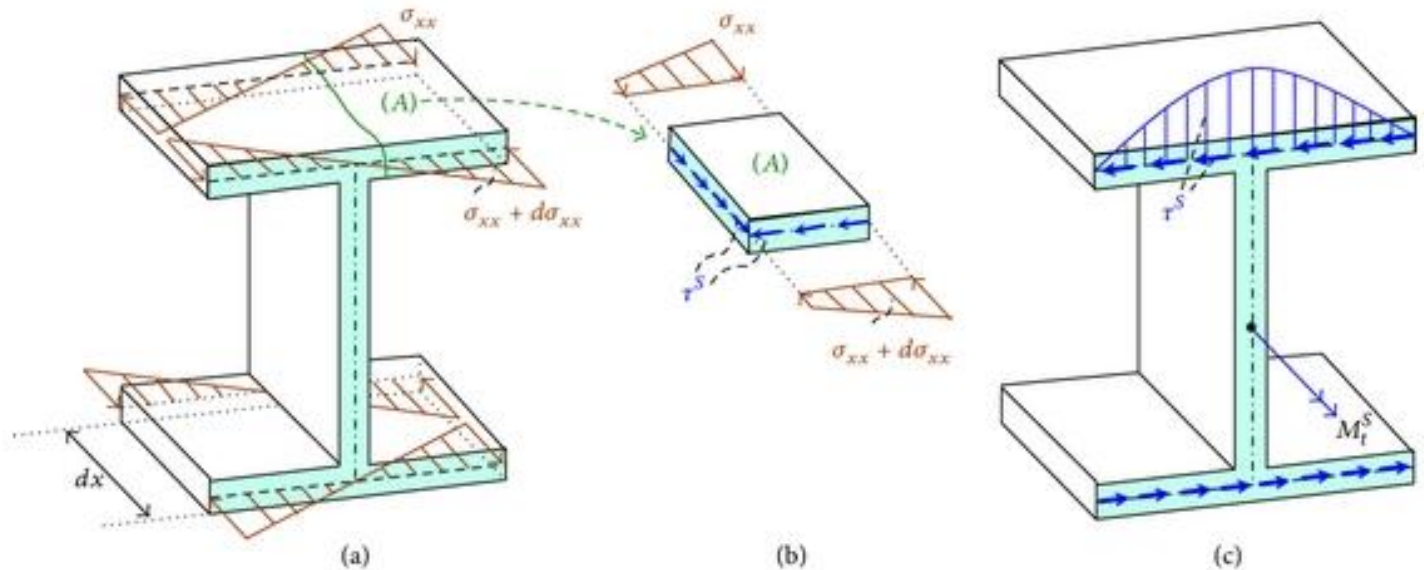
PODSTAWOWE POJĘCIA

Przemieszczenia przekroju i odpowiadające im siły przekrojowe:

- przemieszczanie \rightarrow siła osiowa N powodująca odkształcenia wzdłuż pręta,
- obroty wokół osi głównych \rightarrow momenty M powodujące obrót przekroju,
- paczenie (deplanacja) \rightarrow bimoment B , podwójna para sił powodująca wzajemny obrót dwóch płaszczyzn.

Pojęcia:

- deplanacja,
- bimoment.



PODSTAWOWE POJĘCIA

Charakterystyki geometryczne:

- współrzędne wycinkowe ω ,
- wycinkowy moment bezwładności I_ω ,
- środek ścinania.

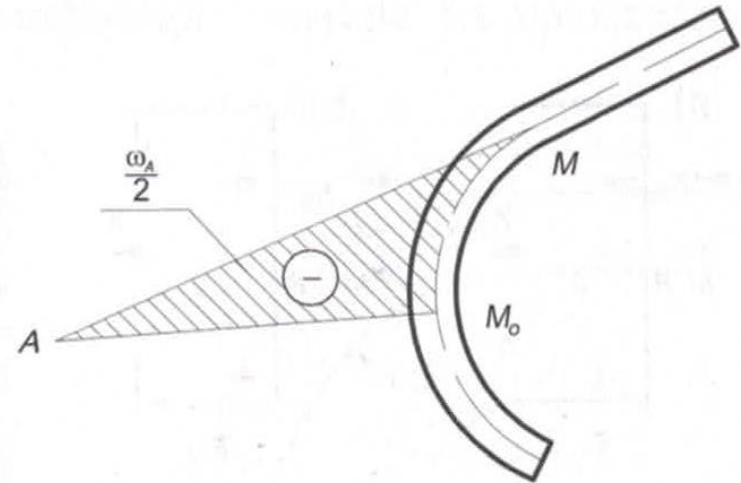
Profil sprowadza się do konturu w linii środkowej profilu. Punkty konturu definiują trzy współrzędne: y , z , ω .

$$\omega_A = - \int_{\alpha}^{\beta} r_w^2 d\theta = - \int_{s1}^{s2} r_w^2 ds,$$

gdzie $r_w = f(\theta)$ jest funkcją określającą kształt konturu.

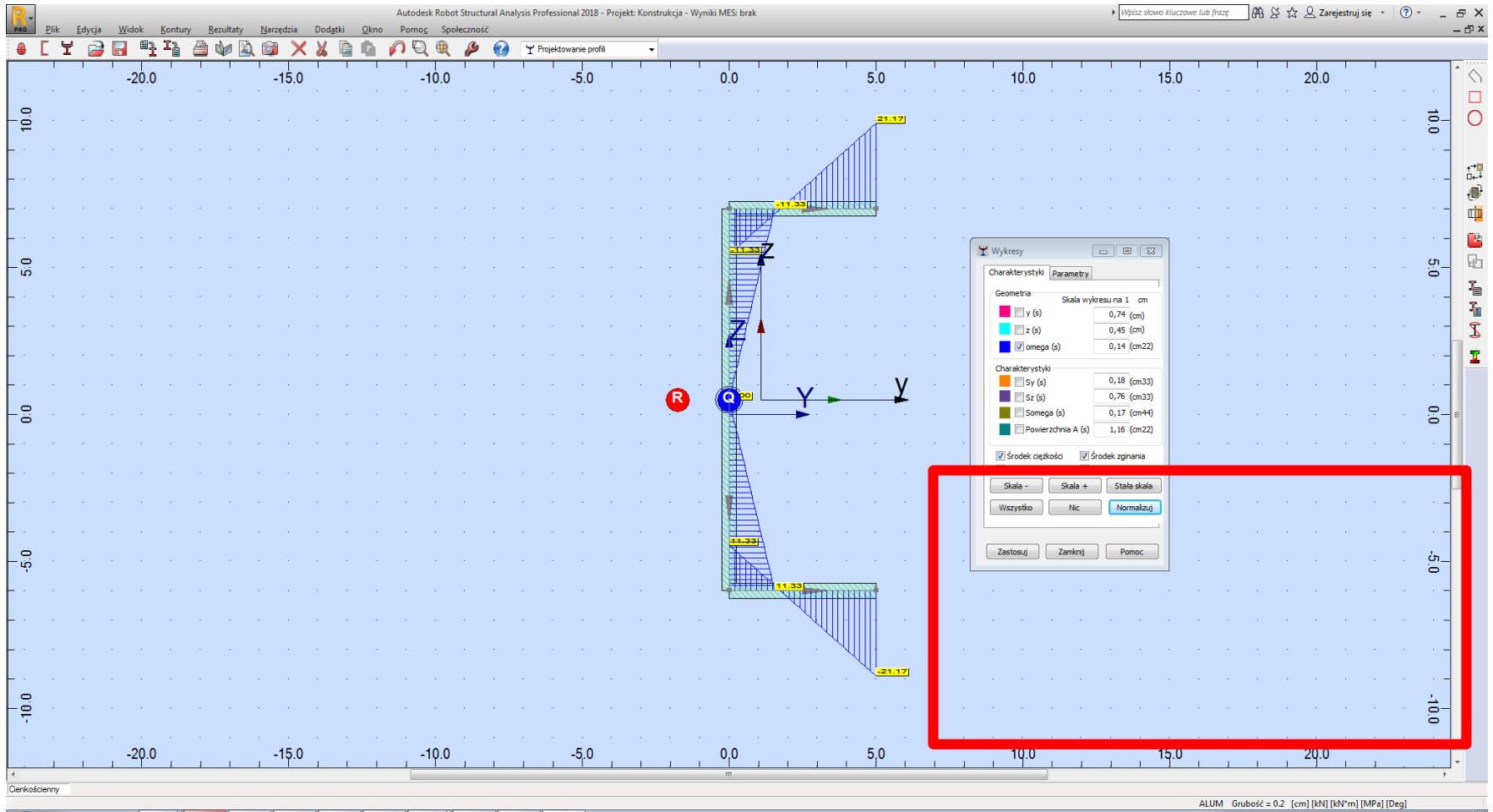
$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA.$$

W środku ścinania $\int_A \sigma \omega dA = 0$.



Rys. 4.4 Profil i punkty konturu do definicji pola wycinkowego

WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYK



WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYK

Przekrój	Cechy geometryczne
	$y_s = e = \frac{b}{4} \cdot \sqrt{2}; \quad x_s = 0$ $I_T = \frac{2}{3} \cdot b \cdot t^3$ $I_w = \frac{1}{18} \cdot b^3 \cdot t^3, \text{ można przyjmować } I_w = 0$ $r_y = 0$ $r_x = -\frac{b}{2} \cdot \sqrt{2}$
	$y_s = e = \frac{b_3 \cdot t_3}{2 \cdot A} \cdot (b_3 + t_1); \quad x_s = 0$ $I_T = \frac{1}{3} \cdot (b_1 \cdot t_1^3 + b_3 \cdot t_3^3)$ $I_w = \frac{1}{144} \cdot b_1 \cdot t_1^3 + \frac{1}{36} \cdot h^3 \cdot t_3^3, \text{ można przyjmować } I_w = 0$ $r_y = 0$ $r_x = \frac{1}{k} \cdot \left\{ y_s \cdot I_y + b_1 \cdot t_1 \cdot e^3 + \frac{t_3^3}{4} \cdot [e^4 - (h-e)^4] \right\}$
	$y_s = 0; \quad x_s = 0$ $I_T = \frac{1}{3} \cdot (b_1 \cdot t_1^3 + b_2 \cdot t_2^3)$ $I_w = \frac{1}{18} \cdot (b_1^3 \cdot t_1^3 + b_2^3 \cdot t_2^3), \text{ można przyjmować } I_w = 0$ $r_y = 0$ $r_x = 0$
	$y_s = 0; \quad x_s = 0$ $I_T = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot b \cdot t^3 + h \cdot t^3)$ $I_w = \frac{(t \cdot b^3 \cdot h^2 / 12) \cdot (b + 2 \cdot h)}{2 \cdot b + h}$ $r_y = 0$ $r_x = 0$
	$y_s = r \cdot \left[\frac{2 \cdot (\sin \alpha - \alpha \cdot \cos \alpha)}{\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right]; \quad x_s = 0$ $I_T = \frac{1}{3} \cdot l \cdot t^3, \text{ gdzie } l = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{90^\circ}$ $I_w = r^5 \cdot t \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \alpha^3 - \frac{4 \cdot (\sin \alpha - \alpha \cdot \cos \alpha)^2}{\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \right]$ $r_y = 0$ $r_x = -\frac{2 \cdot r \cdot \sin \alpha}{\alpha}$

1	2
	$y_s = \frac{b+c}{2 \cdot \sqrt{2}} + \frac{b \cdot c^2 \cdot t}{3 \cdot \sqrt{2} \cdot I_y} \cdot (3 \cdot b - 2 \cdot c); \quad x_s = 0$ $I_T = \frac{2}{3} \cdot (b+c) \cdot t^3$ $I_w = \frac{b^4 \cdot c^3 \cdot t^2}{18 \cdot I_y} \cdot (4 \cdot b + 3 \cdot c)$ $r_y = 0$ $r_x = -\frac{b^4 \cdot t}{10 \cdot I_x} \cdot \frac{0.5 \cdot b \cdot \sqrt{2} - e}{b - e \cdot \sqrt{2}} - \frac{c \cdot t \cdot (2 \cdot b - c)}{I_x}$ $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (b-c)^2 + \frac{c}{3} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (b + \frac{3 \cdot c}{10}) - e \right] \right\}$
	$y_s = \frac{h^2}{b+2 \cdot h} + \frac{3 \cdot h^2}{b+6 \cdot h}; \quad x_s = 0$ $I_T = \frac{t^3}{3} \cdot (b+2 \cdot h)$ $I_w = \frac{b^2 \cdot h^3 \cdot t}{12} \cdot \frac{2 \cdot b + 3 \cdot h}{b+6 \cdot h}$ $r_y = 0$ $r_x = \frac{t}{I_x} \cdot \left\{ b \cdot e \cdot \left(e^2 + \frac{b^2}{12} \right) + \frac{b^2 \cdot h}{4} \cdot (2 \cdot e - h) + \frac{1}{2} \left[e^4 - (h-e)^4 \right] \right\}$
	$y_s = \frac{h \cdot t \cdot (h+2 \cdot c)}{A} + \frac{h \cdot t}{12 \cdot I_y} \cdot (6 \cdot b^2 \cdot c + 3 \cdot b^2 \cdot h - 8 \cdot c^3);$ $x_s = 0$ $I_T = \frac{t^3}{3} \cdot (b+2 \cdot c+2 \cdot h)$ $I_w = \frac{t^2}{A} \cdot \left[\frac{b^2 \cdot e \cdot A}{t} \cdot \left(\frac{h^2}{3} + (y_s - e)^2 - (y_s - e) \cdot h \right) + \frac{A}{3 \cdot t} \cdot \left[(y_s - e)^2 \cdot b^3 + (2 \cdot c + 3 \cdot b) \cdot c^2 \cdot h^2 + (y_s - e)^2 \cdot I_y \cdot (2 \cdot b + 4 \cdot c) + (y_s - e) \cdot c^2 \cdot \left[8 \cdot c \cdot h^2 + 2 \cdot (y_s - e) \cdot [2 \cdot c \cdot (c-b) + h \cdot (2 \cdot c - 3 \cdot b)] \right] + \frac{b^2 \cdot h^2}{6} \cdot [(3 \cdot c + h) \cdot (4 \cdot c + b) - 6 \cdot c^2] - (y_s - e)^2 \cdot b^4 \right] \right]$ $r_y = 0$ $r_x = \frac{t}{I_x} \cdot \left\{ b \cdot e \cdot \left(e^2 + \frac{b^2}{12} \right) + \frac{b^2 \cdot h}{4} \cdot (2 \cdot e - h) + \frac{1}{2} \left[e^4 - (h-e)^4 \right] - 2 \cdot c \cdot (h-e) \cdot \left[\frac{c^2}{12} + (h-e)^2 \right] \right\}$

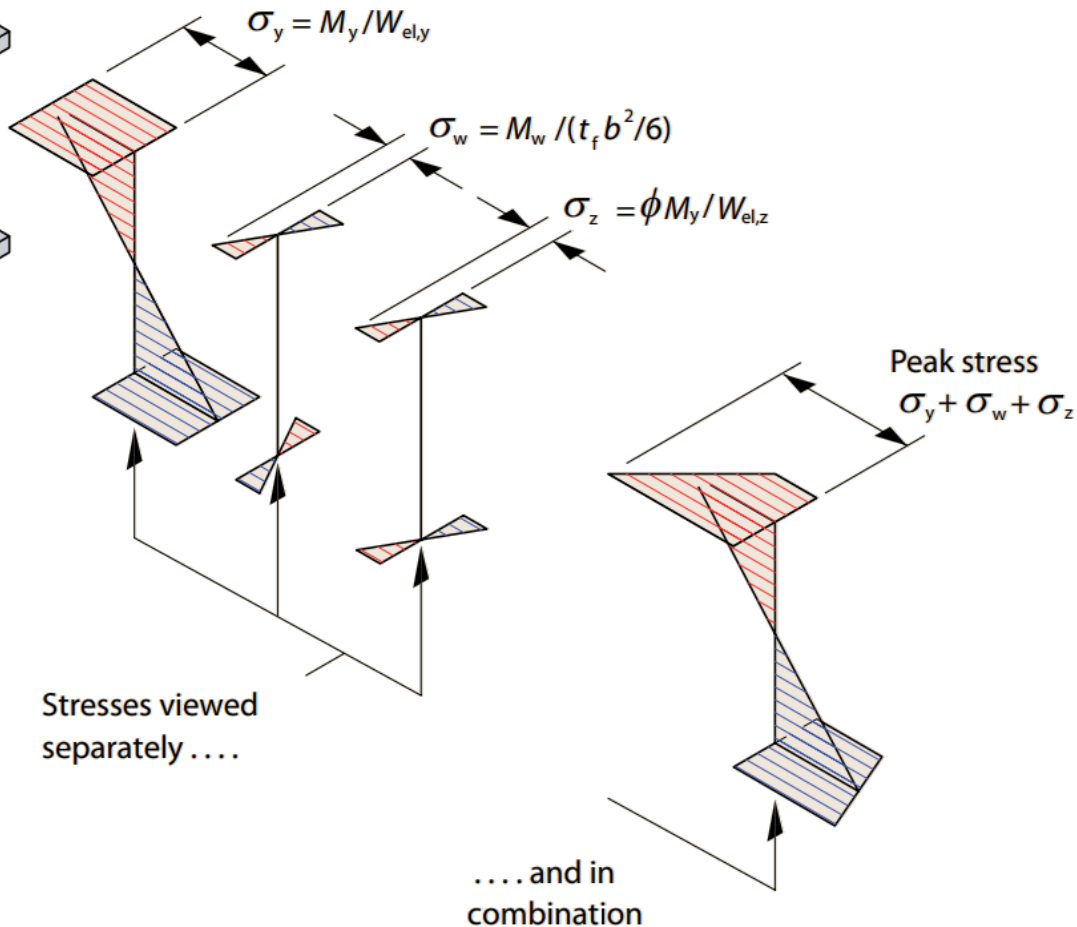
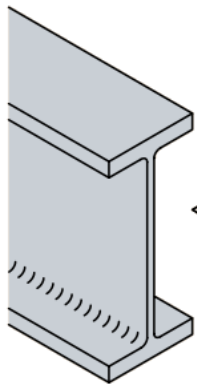
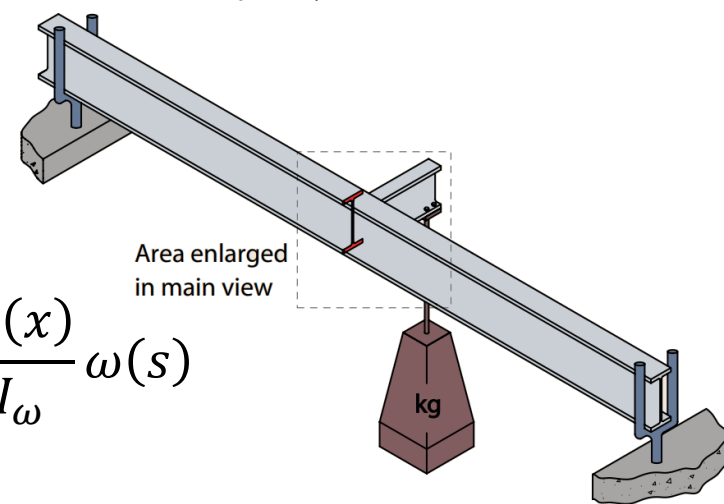
WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYK

1	2
	$y_s = \frac{h \cdot t \cdot (h + 2 \cdot c)}{A} + \frac{h \cdot t}{12 \cdot I_y} \cdot (6 \cdot b^2 \cdot c + 3 \cdot b^2 \cdot h - 8 \cdot c^3)$ $x_s = 0$ $I_T = \frac{t^3}{3} (b + 2 \cdot c + 2 \cdot h)$ $I_w = \frac{b^2}{4} \left[I_x + e^2 \cdot A \cdot \left(1 - \frac{b^2 \cdot A}{4 \cdot I_y} \right) \right] + \frac{2 \cdot c^3 \cdot h^2 \cdot t}{3} - b \cdot c^2 \cdot h^2 \cdot t + \frac{b^2 \cdot c^3 \cdot h \cdot t \cdot e \cdot A}{3 \cdot I_y} - \frac{4 \cdot c^6 \cdot h^2 \cdot t^2}{9 \cdot I_y}$ $r_y = 0$ $r_x = \frac{t}{I_x} \left[b \cdot e \cdot \left(e^2 + \frac{b^2}{12} \right) + \frac{b^2 \cdot h}{4} \cdot (2 \cdot e - h) \right] + \frac{1}{2} \cdot \left[e^4 - (h - e)^4 \right] - 2 \cdot c \cdot (h - e) \cdot \left[\frac{c^2}{12} + (h - e)^2 \right]$
	$y_s = 0; \quad x_s = 0$ $I_T = \frac{1}{3} (2 \cdot b \cdot t_1^3 + h \cdot t_2^3)$ $I_w = \frac{h^2 \cdot I_y}{4}$ $r_y = 0$ $r_x = 0$
	$y_s = \frac{1}{I_y} \cdot [e \cdot I_1 - (h - e) \cdot I_2] \quad x_s = 0$ $I_1 = \frac{1}{12} b_1^3 t_1, \quad I_2 = \frac{1}{12} b_2^3 t_2$ $I_T = \frac{1}{3} (b_1 \cdot t_1^3 + b_2 \cdot t_2^3 + h \cdot t_3^3)$ $I_w = \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot h^2}{I_y}$ $r_y = 0$ $r_x = \frac{1}{I_x} \left\{ y_s \cdot I_y + b_1 \cdot t_1 \cdot e^3 - b_2 \cdot t_2 \cdot (h - e)^3 + \frac{t_3}{4} \cdot [e^4 - (h - e)^4] \right\}$
	$y_s = 0; \quad x_s = 0$ $I_T = b^3 \cdot t$ $I_w = 0$ $r_y = 0$ $r_x = 0$

1	2
	$y_s = 0; \quad x_s = 0$ $I_T = \frac{2 \cdot b^2 \cdot h^2 \cdot t_2}{b \cdot t_2 + h \cdot t_1}$ $I_w = \frac{b^2 \cdot h^2}{24} \cdot \frac{(b \cdot t_2 - h \cdot t_1)^2}{(b \cdot t_2 + h \cdot t_1)^2} \cdot (b \cdot t_1 + h \cdot t_2)$ $r_y = 0$ $r_x = 0$
<p>A pole przekroju poprzecznego</p> <p>I_y moment bezwładności względem osi y-y</p> $r_x = \frac{\int x \cdot (x^2 + y^2) \cdot dA}{I_y}$ <p>I_w wycinkowy moment bezwładności</p> <p>*ostateczne symbole mają znaczenie, jak na rysunkach tablicy.</p>	<p>I_x moment bezwładności względem osi x-x</p> <p>I_T moment bezwładności przy swobodnym skręcaniu</p> <p>$r_x = \frac{\int y \cdot (x^2 + y^2) \cdot dA}{I_x}$ cechy geometryczne, związane ze ściskaniem mimośrodowym i zwichrzeniem</p> <p>x, y rzędne punktu na konturze profilu</p>

NAPRĘŻENIA NORMALNE

$$\sigma(x, s) = \frac{N(x)}{A} + \frac{M_y(x)}{I_y} z(s) - \frac{M_z(x)}{I_z} y(s) + \frac{B(x)}{I_\omega} \omega(s)$$



NAPRĘŻENIA NORMALNE

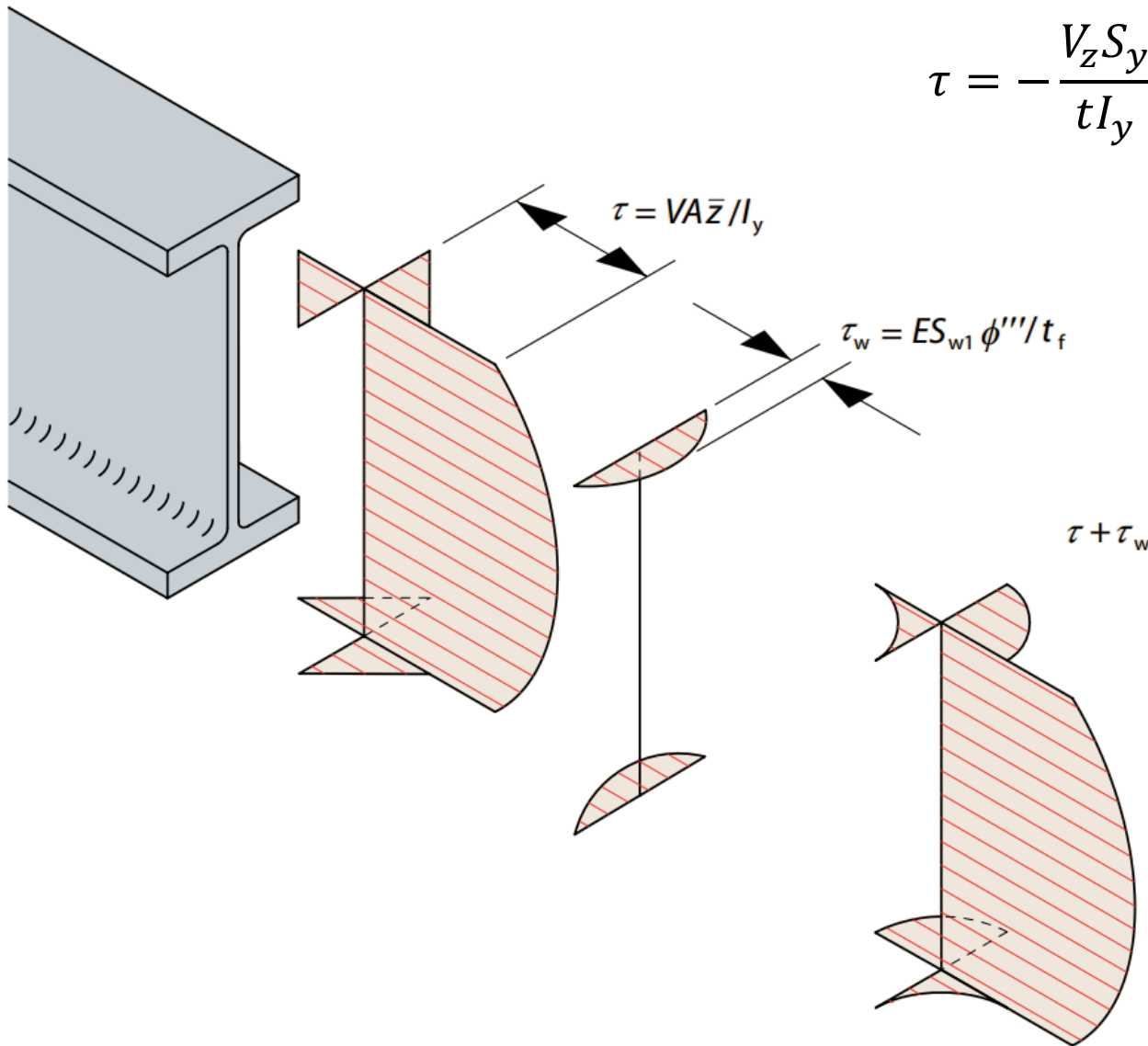
Naprężenia spowodowane do sił wewnętrznych:

- siła podłużna: $N = \int_A \sigma dA,$
- momenty zginające: $M_y = \int_A \sigma z dA$ lub $M_z = \int_A \sigma y dA,$
- bimoment: $B = \int_A \sigma \omega dA.$

Stąd warunek nośności przekroju:

$$\frac{M_{y,Ed}}{M_{y,el,Rd}} + \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,el,Rd}} + \frac{B_{Ed}}{B_{el,Rd}} \leq 1$$

NAPRĘŻENIA STYCZNE

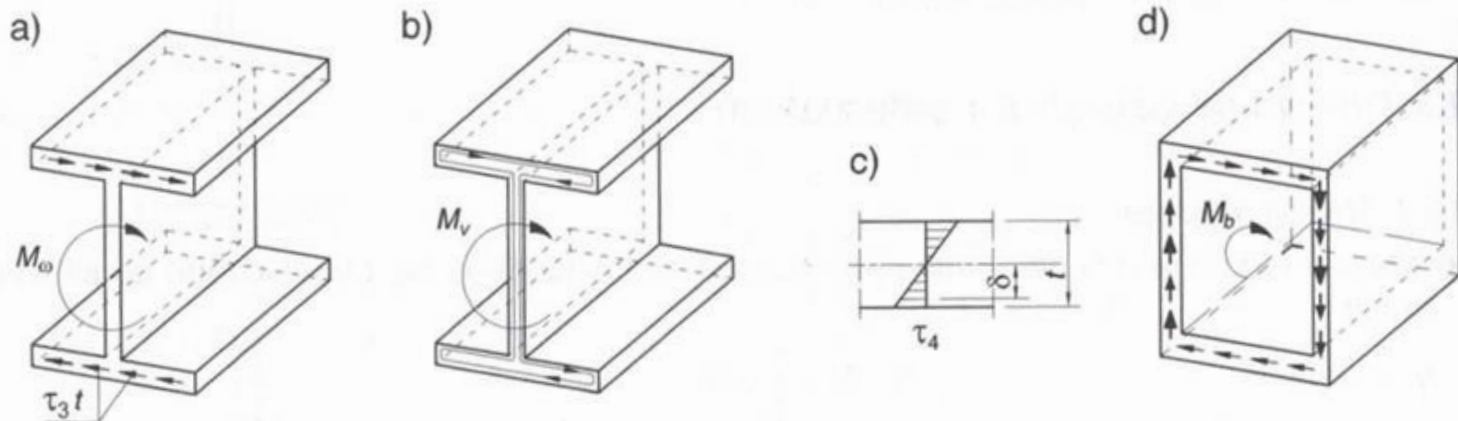


$$\tau = -\frac{V_z S_y}{t I_y} - \frac{V_y S_z}{t I_z} - \frac{M_\omega S_\omega}{t I_\omega} \pm \frac{M_t}{I_t} t$$

NAPRĘŻENIA STYCZNE

Naprężenia spowodowane do sił wewnętrznych:

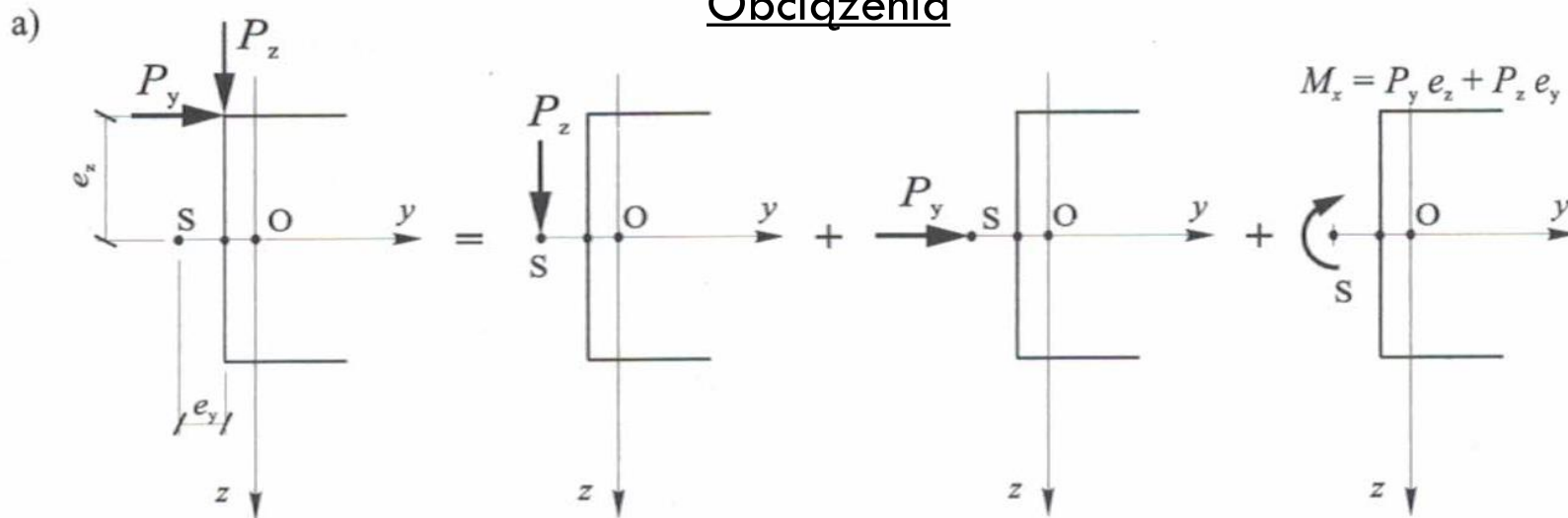
- siły poprzeczne: $V_z = \int_A \tau_1 dA$ lub $V_y = \int_A \tau_2 dA,$
- moment giętno-skrętny: $M_\omega = \int_A \tau_\omega \omega dA,$
- moment czystego skręcania:
 - przekroju otwartego: $M_T = \int_A \tau_4 \delta dA,$
 - przekroju zamkniętego: $M_T = \int_A \tau_5 r dA$



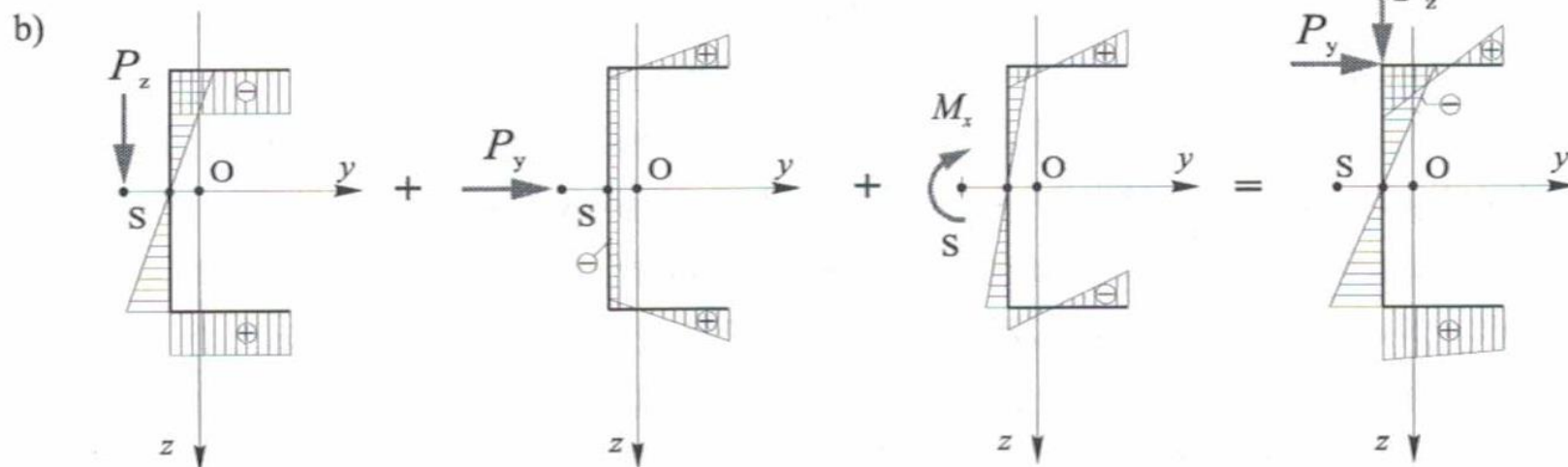
Rys. 4.11 Strumienie naprężeń stycznych: a) od momentu giętno-skrętnego, b) od momentu skręcającego M_v , c) fragment ścianki z rys. b) w powiększeniu, d) od momentu skręcającego M_b

WYMIAROWANIE CŁOWNIKA

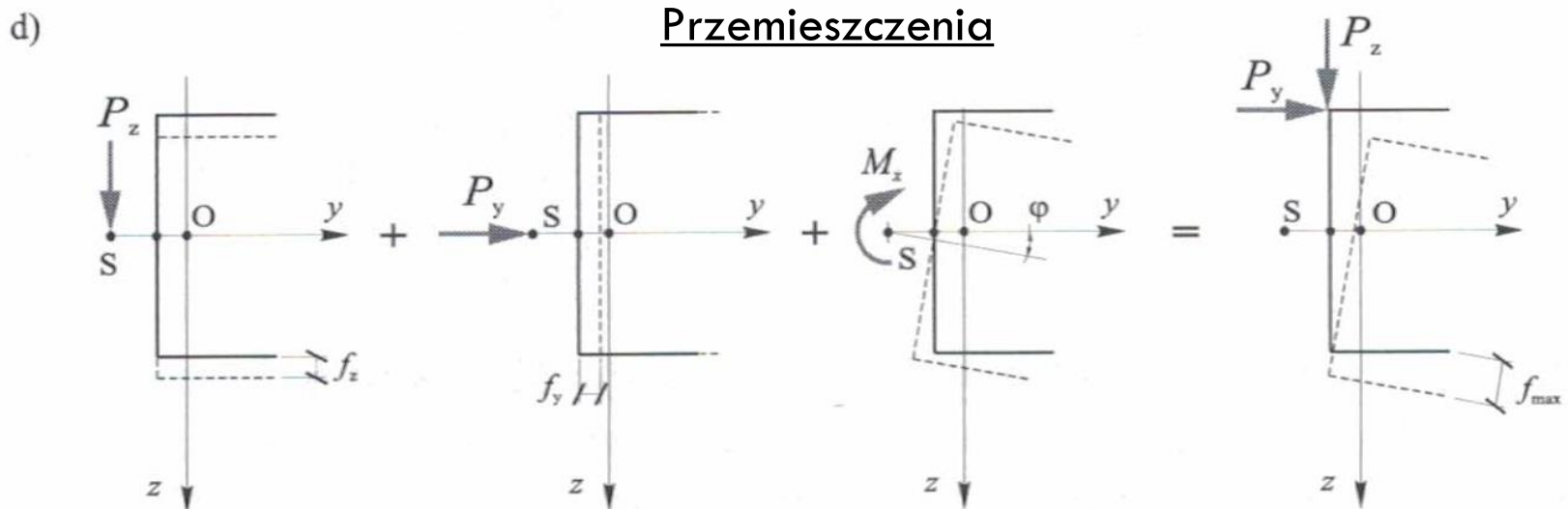
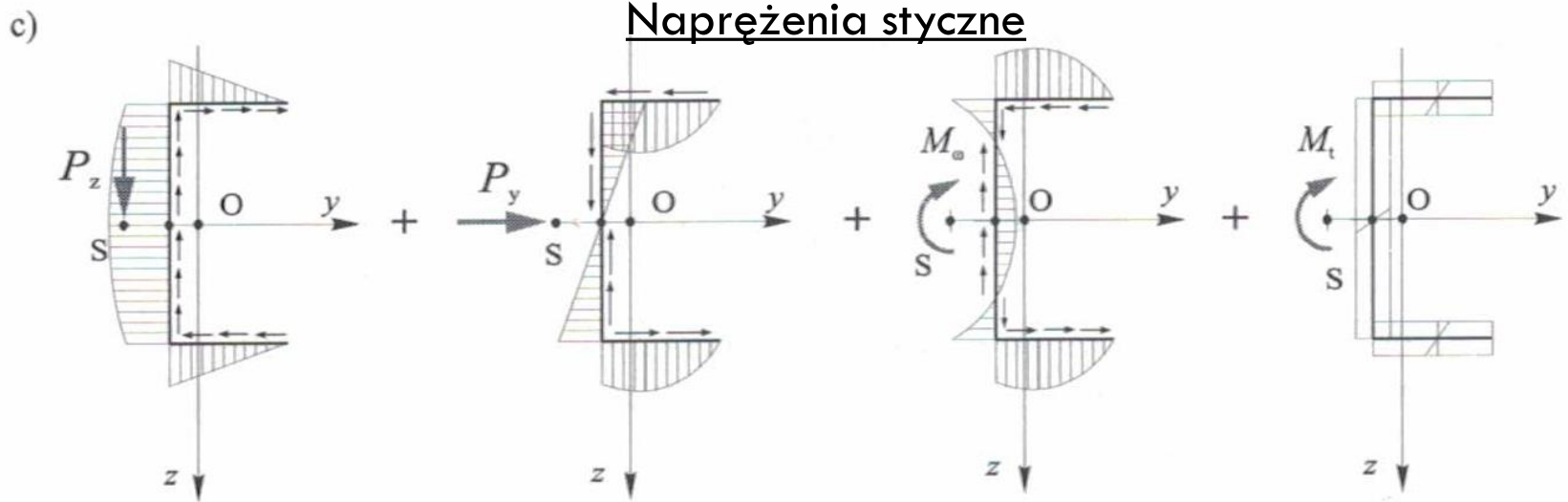
Obciążenia



Naprężenia normalne



WYMIAROWANIE CEOWNIKA



SKRĘCANIE SWOBODNE (CZYSTE)

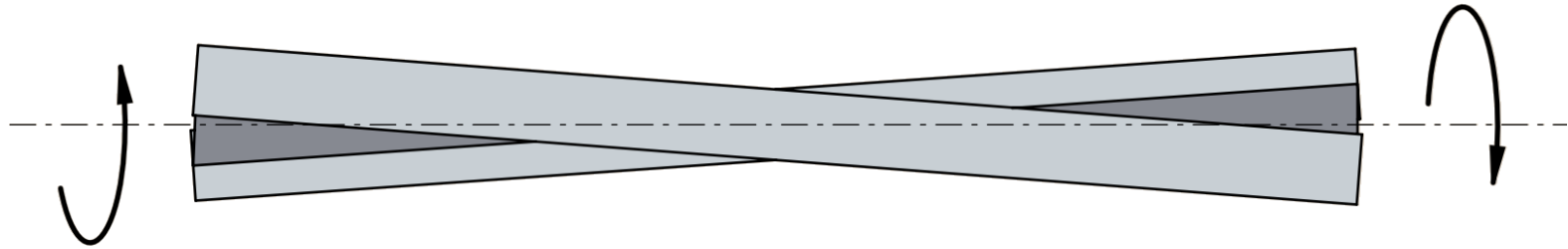
Teoria opracowana przez *Saint-Venanta* i *Bredta* przyjmuje, że odkształcenie pręta pryzmatycznego składa się z:

- obrotu poprzecznego wokół osi do niego prostopadłej, przechodzącej przez środek ścinania,
- jednakowej deplanacji wszystkich przekrojów.

Taka swoboda deplanacji występuje, gdy:

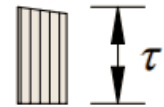
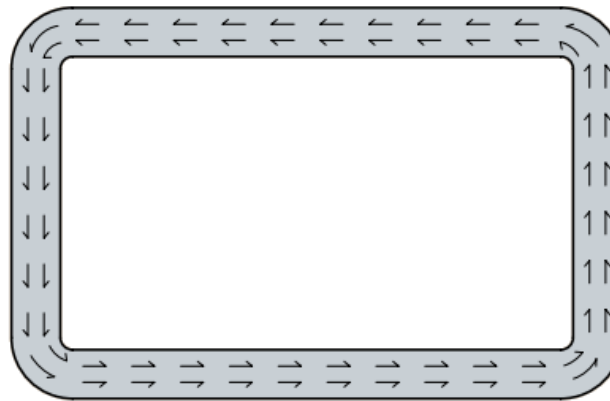
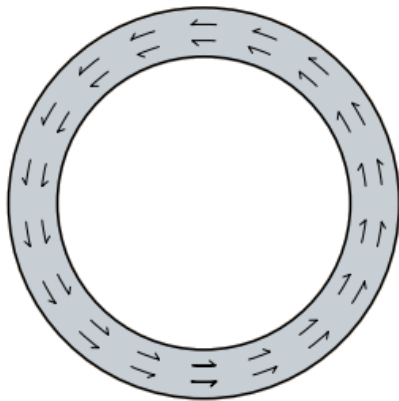
- na pryzmatyczny pręt oddziałują dwa równoważące się momenty skręcające,
- kąt skręcenia jest infinitezymalny (można pominąć zmiany odległości wzajemnych końców pręta zakrzywiających się śrubowo).

SKRĘCANIE SWOBODNE (CZYSSTE)



Ends free to warp

Strumień naprężeń stycznych



Stress variation
(near uniform)

Shear stresses in closed sections

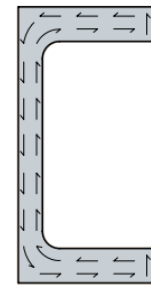
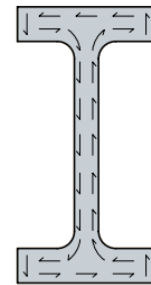
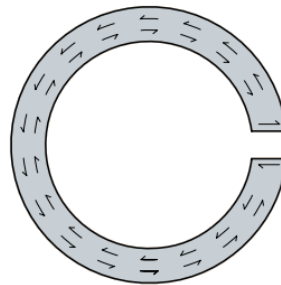
SKRĘCANIE SWOBODNE (CZYSTE)

Kąt skręcenia:

$$\varphi = \frac{M\ell}{GI_T}$$

Deplanacja:

$$\varphi' = \frac{M}{GI_T}$$



d)



Stress variation
(in all elements)

Shear stresses in open sections

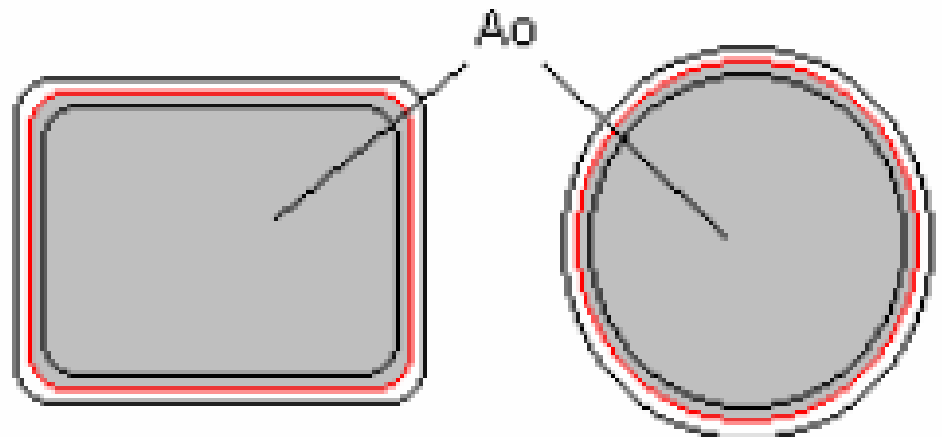
Naprężenia styczne

- profil otwarty:

$$\tau_T = \pm \frac{2M\delta}{I_T}, \quad \tau_{T,\max} = \pm \frac{Mt}{I_T}$$

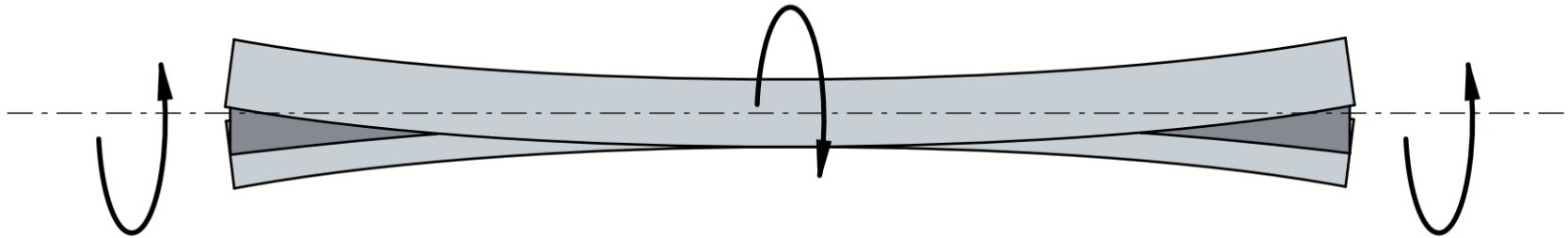
- profil zamknięty:

$$\tau_T = \tau_{T,\max} = \frac{M}{A_o t}$$



SKRĘCANIE NIESWOBODNE (SKRĘPOWANE)

Występuje w sytuacji, gdy nie mamy do czynienia ze swobodą deplanacji przekroju.



Ends free to warp

Moment skręcający M_x jest sumą efektów momentu giętno-skrętnego M_ω i czystego skręcania M_T .

$$M_x = M_\omega + M_T$$

SKRĘCANIE NIESWOBODNE (SKRĘPOWANE)

Moment giętno-skrętny wyznaczony na podstawie zależności na naprężenia styczne τ_ω przyjmuje postać:

$$M_\omega = -EI_\omega \varphi^{(3)},$$

wówczas otrzymuje się, że:

$$M_x = M_\omega + M_T = GI_T \varphi^{(1)} - EI_\omega \varphi^{(3)},$$

a po jednokrotnym zrózniczkowaniu otrzymuje się równanie kątów skręcenia skrępowanego pręta:

$$EI_\omega \varphi^{(4)} - GI_T \varphi^{(2)} = m_x(x)$$

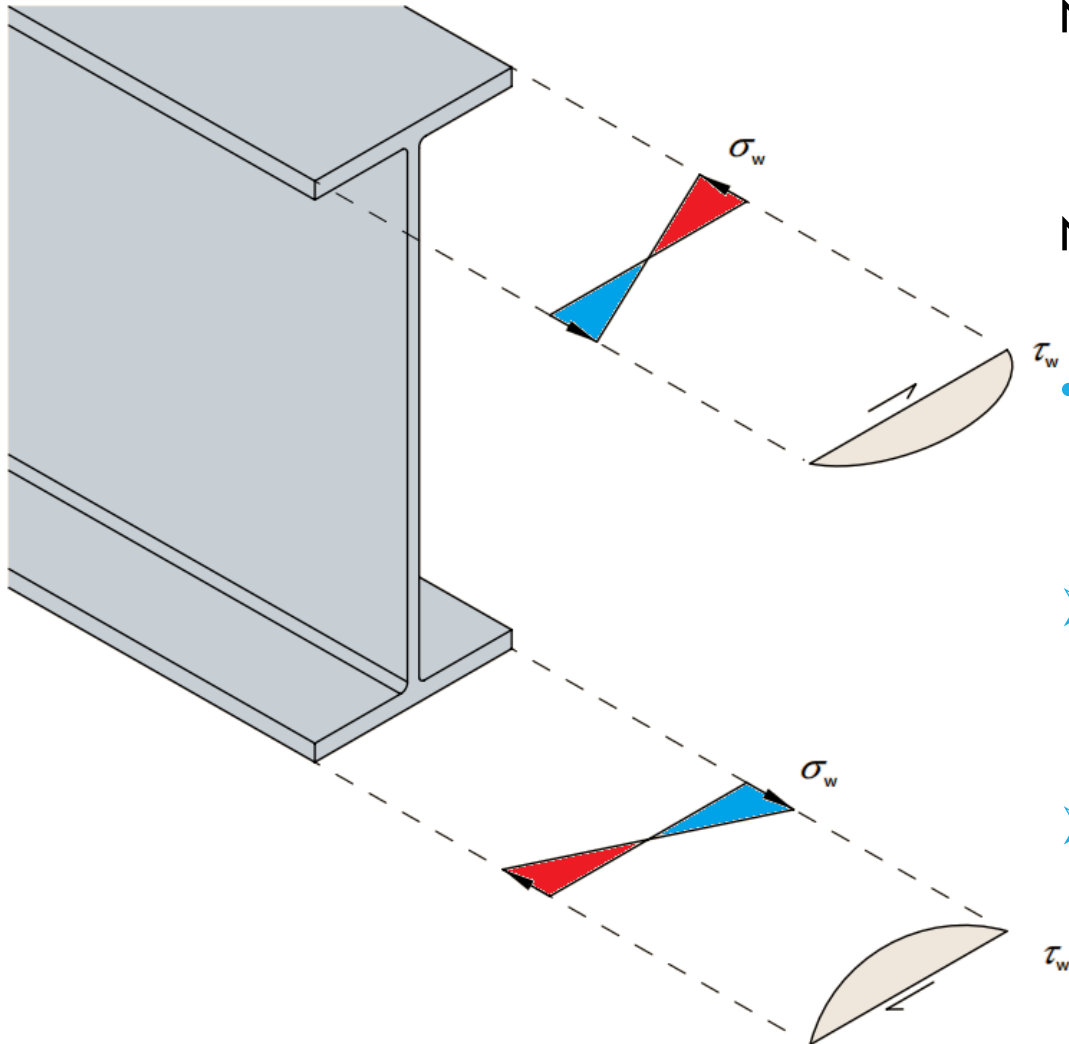
Przemieszczenia:

- kąty skręcenia $\varphi(x)$,
- deplanacja $\varphi'(x)$,
- moment giętno-skrętny M_ω ,
- moment czystego skręcania M_T ,
- moment skręcający M_x .

Siły wewnętrzne:

- bimoment $B(x) = -EI_\omega \varphi^{(2)}(x)$

SKRĘCANIE NIESWOBODNE (SKRĘPOWANE)



Naprężenia normalne:

$$\sigma_{\omega} = \frac{B\omega}{I_{\omega}}$$

Naprężenia styczne

$$\tau = \tau_T + \tau_{\omega}$$

• styczne wycinkowe

$$\tau_{\omega} = \frac{M_{\omega}S_{\omega}}{I_{\omega}t}$$

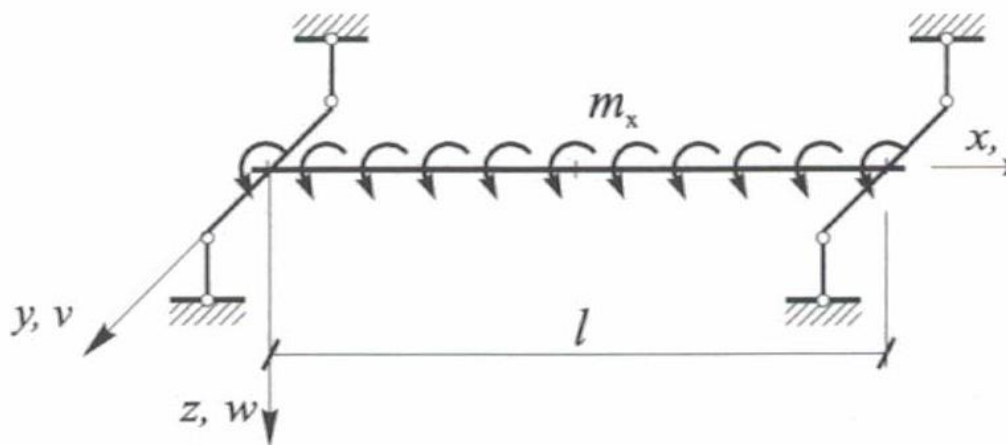
➤ profile otwarte

$$\tau = \pm \frac{M_T t}{I_T} + \frac{M_{\omega}S_{\omega}}{I_{\omega}t},$$

➤ profile zamknięte

$$\tau = \pm \frac{M_T}{A_o t} + \frac{M_{\omega}S_{\omega}}{I_{\omega}t}.$$

SKRĘCANIE NIESWOBODNE (SKRĘPOWANE)



SKRĘCANIE

Znaczenie skręcania swobodnego i skrępowanego w zależności od przekroju.

SECTION TYPE	SHAPE	ST VENANT	WARPING
Circular hollow sections	○	✓	—
Rectangular and elliptical hollow sections	□ □ ○	✓	✗
Angles, Tees and cruciform sections	T L +	✓	✗
Twin-flanged rolled and fabricated sections	I I C	✓	✓
Thin cold-formed sections	Z Σ	✗	✓

Key: ✓ = significant; ✗ = negligible; — = does not act

WARUNKI NOŚNOŚCI PRZEKROJU

Maksymalne naprężenia w przekrojach pręta nie powinny przekraczać wytrzymałości obliczeniowej:

$$\sigma_{x,Ed} \leq \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \quad \text{i} \quad \tau_{Ed} \leq \frac{f_y}{\sqrt{3}\gamma_{M0}}.$$

W każdym punkcie przekroju łączne naprężenia normalne i styczne powinny spełniać warunek normowy:

$$\left(\frac{\sigma_{x,Ed}}{f_y/\gamma_{M0}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{z,Ed}}{f_y/\gamma_{M0}} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_{x,Ed}}{f_y/\gamma_{M0}} \right) \left(\frac{\sigma_{z,Ed}}{f_y/\gamma_{M0}} \right) + 3 \left(\frac{\tau_{Ed}}{f_y/\gamma_{M0}} \right)^2 \leq 1,0.$$