

CIENKOŚCIENNE KONSTRUKCJE METALOWE

Wykład 7: Wymiarowanie elementów cienkościennych o przekroju otwartym w ujęciu teorii nośności nadkrytycznej Wintera.

UWAGI OGÓLNE

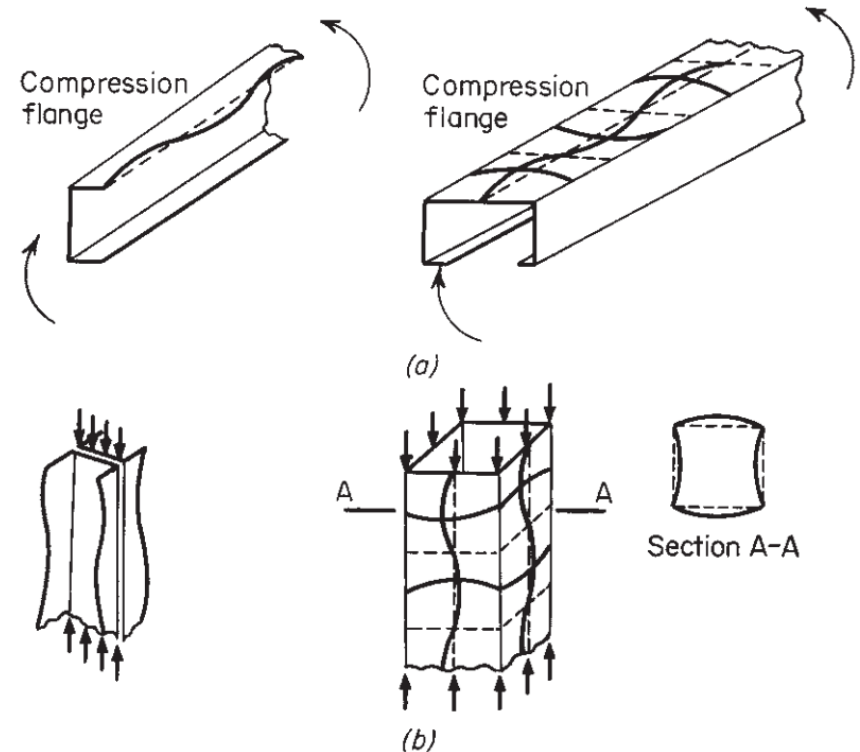
W konstrukcjach smukłościennych zaobserwowano zjawisko lokalnej utraty stateczności. Może ono pojawić się przy naprężeniach krytycznych niższych niż granica plastyczności w elementach poddanych ścisaniu, zginaniu, ścinaniu.

Ściskane płyty, w zależności od warunków podparcia, nie zachowują się jak jednowymiarowe pręty, lecz w wyniku redystrybucji naprężeń element jest w stanie przenieść kolejne przyrosty obciążenia.

Jest to zjawisko **nośności nadkrytycznej**.

Może być kilkukrotnie większa niż nośność wynikająca z naprężeń krytycznych.

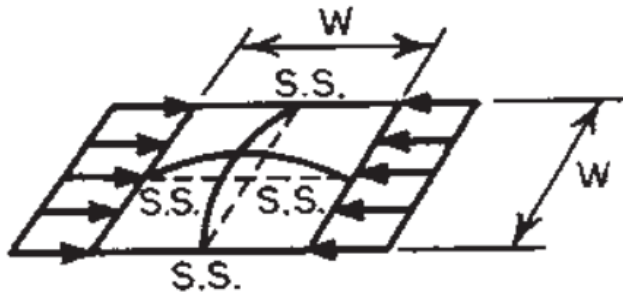
Nośność nadkrytyczną wykorzystuje się w projektowaniu konstrukcji okrętowych, samolotowych i giętych na zimno.



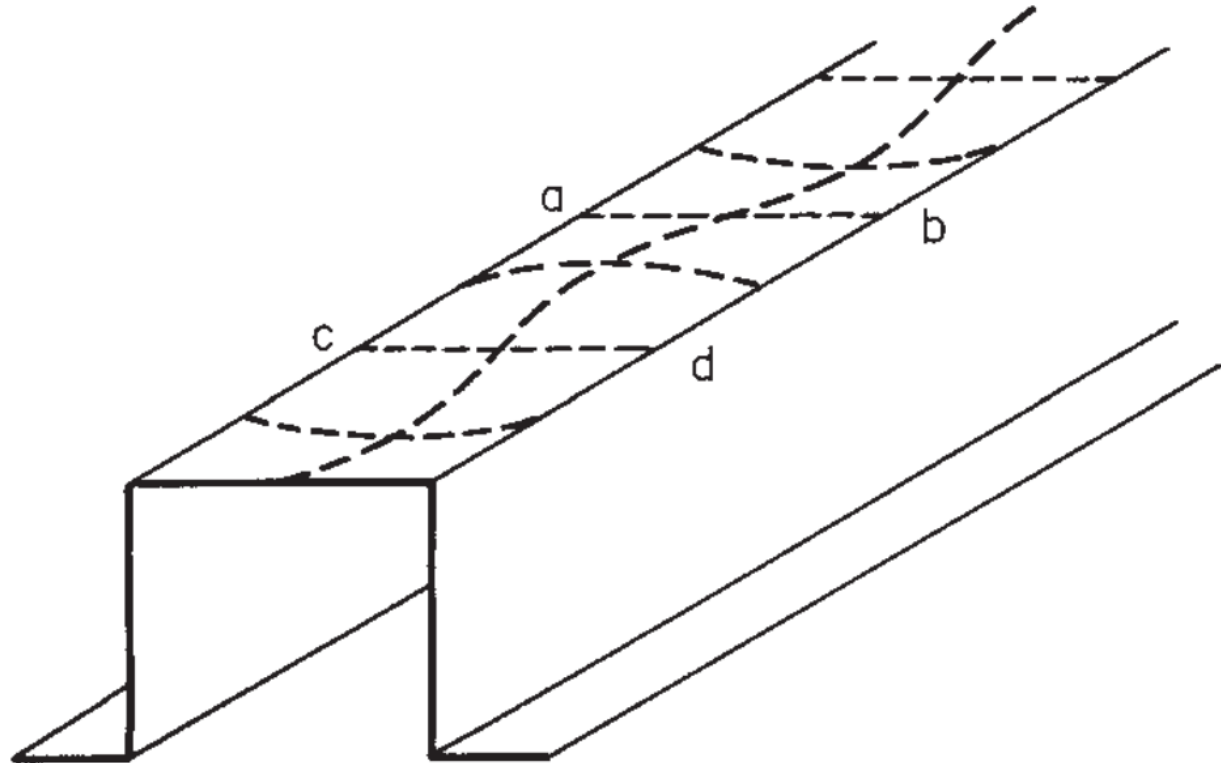
FIZYKA NIESTATECZNOŚCI MIEJSCOWEJ

Przyjmuje się obliczeniowy model płyty sprężystej, w którym ściankach kształtowników uważa się za pasma płytowe o małej grubości.

Postacie deformacji ściskanych płyt o kwadratowym i prostokątnym stosunku krawędzi.



W realnych konstrukcjach stosunek boków jest prostokątny.



STATECZNOŚĆ SPRĘŻYSTA PŁYT

Zachowanie płyty można opisać różniczkowym równaniem cząstkowym

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} + \frac{\sigma_x t}{D} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0,$$

gdzie $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$.

Wówczas naprężenia krytyczne płyty idealnie sprężystej wynoszą

$$\sigma_{cr} = \frac{k_\sigma \pi^2 E}{12(1-\nu^2) \left(\frac{w}{t}\right)^2},$$

gdzie:

w i t – szerokość i grubość płyty,

E – moduł Younga,

k_σ – współczynnik niestateczności miejscowej.

WSPÓŁCZYNNIKI NIESTATECZNOŚCI

Wartości współczynnika k_σ

$$f_{cr} = k \frac{\pi^2 E}{12(1 - \mu^2)(w/t)^2}$$

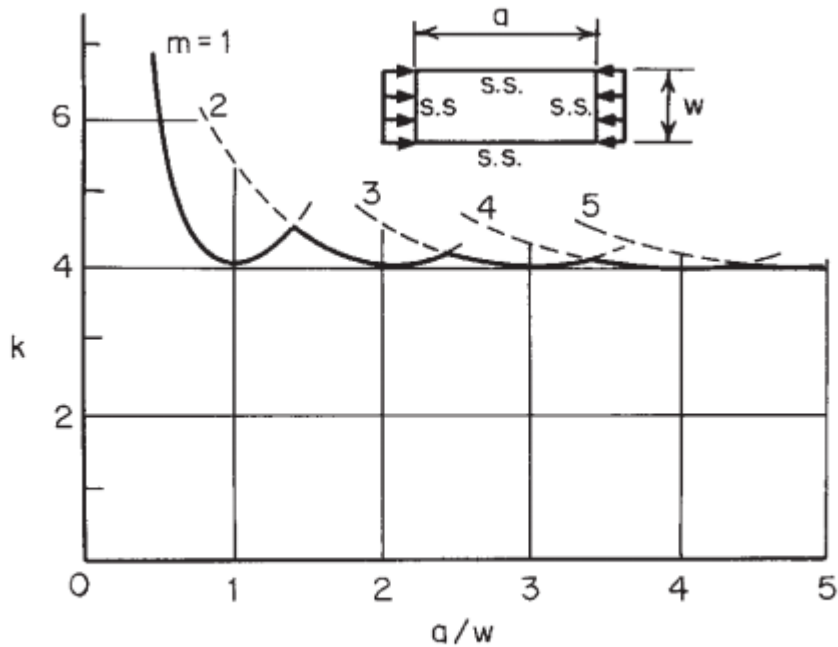
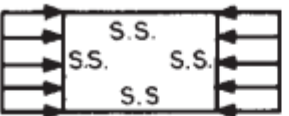
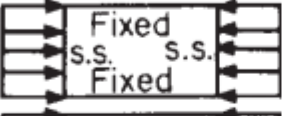
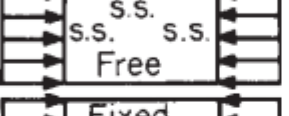
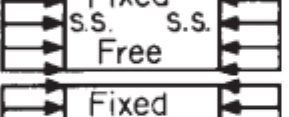
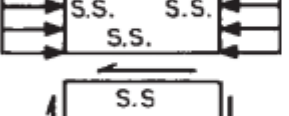
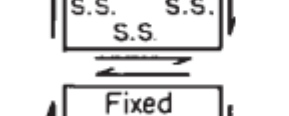
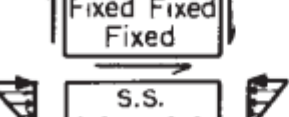
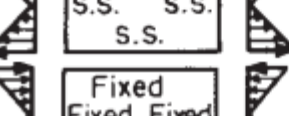
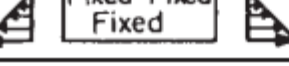


Figure 3.12 Buckling coefficient for flat rectangular plates.^{3.1}

Case	Boundary Condition	Type of Stress	Value of k for Long Plate
(a)		Compression	4.0
(b)		Compression	6.97
(c)		Compression	0.425
(d)		Compression	1.277
(e)		Compression	5.42
(f)		Shear	5.34
(g)		Shear	8.98
(h)		Bending	23.9
(i)		Bending	41.8

NOŚNOŚĆ NADKRYTYCZNA

Pokrytyczne zachowanie płyty zapisane wg teorii dużych przemieszczeń (von Karman, 1910):

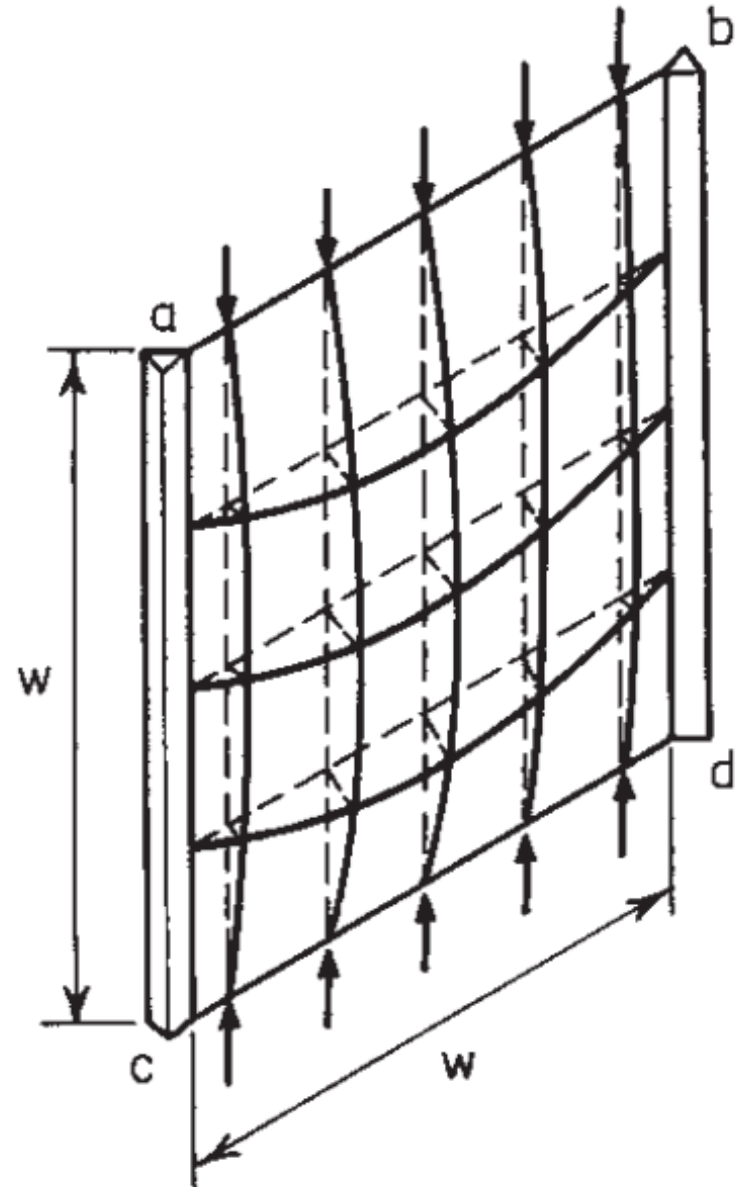
$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} =$$
$$= \frac{t}{D} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right),$$

gdzie

$$\sigma_x = f_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},$$

$$\sigma_y = f_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

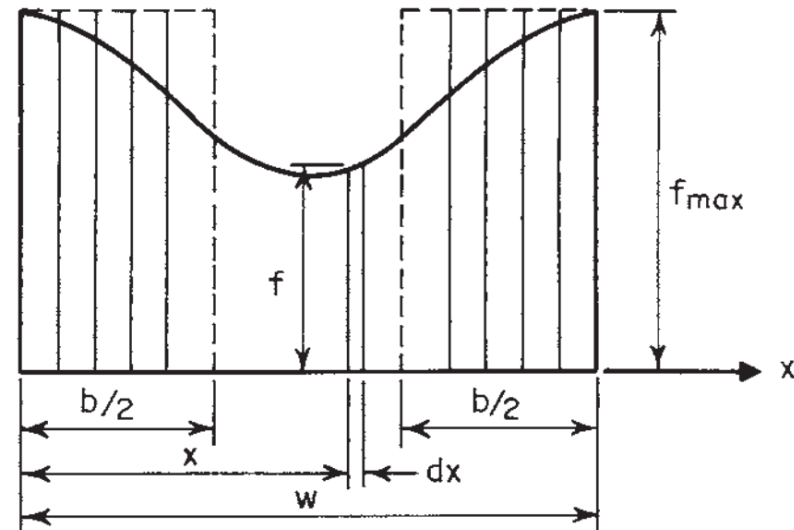
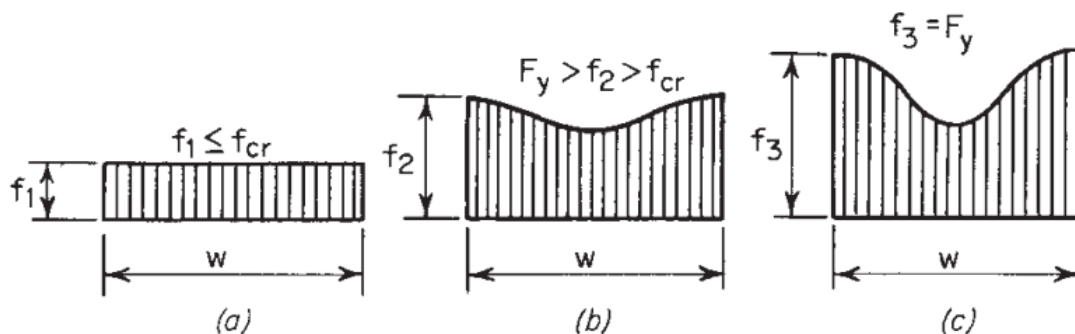


KONCEPCJA SZEROKOŚCI EFEKTYWNEJ

Rozwiązanie przedstawionego równania różniczkowego opartego na teorii dużych przemieszczeń, ze względu na skomplikowaną postać nie znalazło praktycznego zastosowania.

W pracy *T. Von Karman, E. E. Sechler i L. H. Donnell: "The Strength of Thin Plates in Compression,"* Transactions ASME, vol. 54, APM 54-5, 1932, zaproponowano koncepcję szerokości efektywnej.

Zamiast nierównomiernego rozkładu naprężeń na całej szerokości płyty rozważa się, że jest ona obciążona na fikcyjnej szerokości efektywnej w sposób równomierny maksymalną wartością naprężeń.



KONCEPCJA SZEROKOŚCI EFEKTYWNEJ

W przypadku płyty kwadratowej

$$\sigma_{cr} = f_y = \frac{\pi^2 E}{3(1 - \nu^2) \left(\frac{W}{t}\right)^2}$$

można wyznaczyć, że

$$b = Ct \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 1,9t \sqrt{\frac{E}{f_y}},$$

gdzie

$$C = \frac{\pi}{3(1 - \nu^2)} = 1,9.$$

Szerokość efektywną można także przedstawić jako

$$b = Ct \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\max}}}.$$

KONCEPCJA SZEROKOŚCI EFEKTYWNEJ

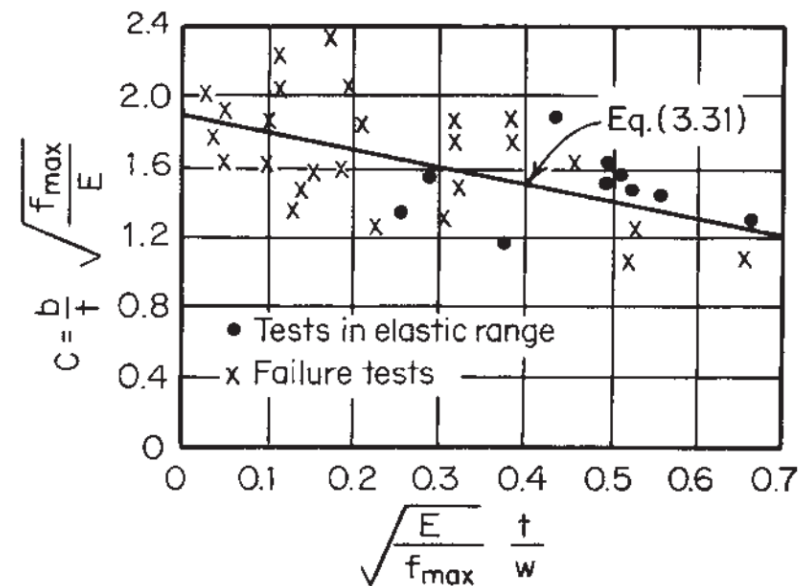
W badaniach doświadczalnych *Winter* zauważył liniową zależność pomiędzy wielkościami C i bezwymiarowym wyrażeniem $\sqrt{\frac{E}{\sigma_{\max}}} \left(\frac{t}{w}\right)$.

Dzięki czemu w 1946 r. przedstawił zmodyfikowaną formułę pozwalającą wyznaczyć szerokość efektywną

$$b = 1,9t \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\max}}} \left(1 - 0,475 \frac{t}{w} \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\max}}} \right).$$

Dzięki takiej modyfikacji można:

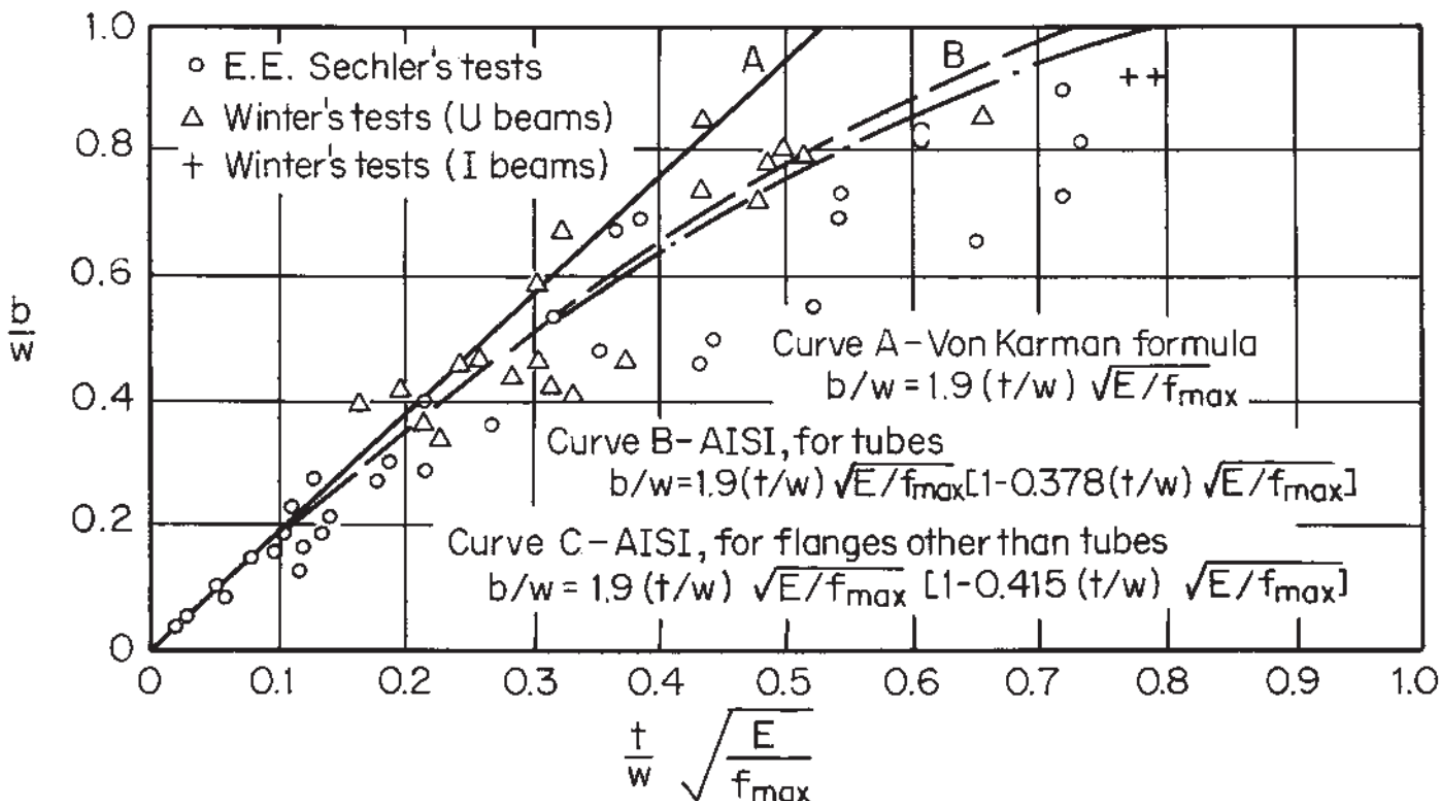
- 1) zastąpić σ_{\max} przez f_y , co umożliwia wyznaczenia nośności płyty,
- 2) wprowadzić empiryczne wskaźniki poprawkowe uwzględniające różnego rodzaju imperfekcje.



KONCEPCJA SZEROKOŚCI EFEKTYWNEJ

Kolejne badania doświadczalne pokazały, że bardziej realne zachowanie równanie

$$b = 1,9t \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\max}}} \left(1 - 0,415 \frac{t}{w} \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\max}}} \right)$$



KONCEPCJA SZEROKOŚCI EFEKTYWNEJ

Równanie szerokości przekroju efektywnego można wyrazić w stosunku $\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{max}}$

$$\frac{b}{w} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{max}}} \left(1 - 0,22 \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{max}}} \right).$$

Wówczas szerokość efektywna jest upraszczana do wyrażenia

$$b = \rho w,$$

gdzie

$$\rho = \frac{1 - 0,22/\sqrt{\sigma_{max}/\sigma_{cr}}}{\sqrt{\sigma_{max}/\sigma_{cr}}} = \frac{1 - 0,22/\lambda}{\lambda} \leq 1.$$

λ jest smukłością względną ścianki płytowej

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{cr}}} = \sqrt{\frac{\sigma_{max} \left[12(1 - \nu^2) \left(\frac{w}{t} \right)^2 \right]}{k\pi^2 E}} = \frac{1,052 w}{\sqrt{k} t} \sqrt{\frac{\sigma_{max}}{E}}$$

WSPÓŁCZYNNIK REDUKCYJNY

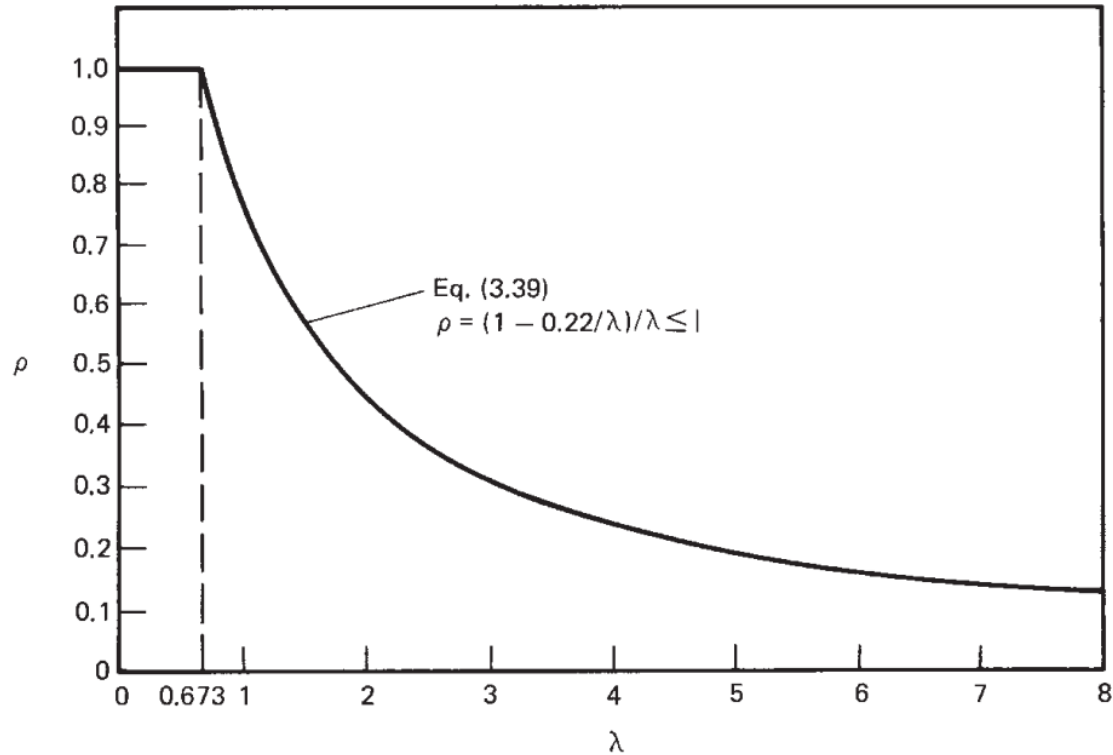
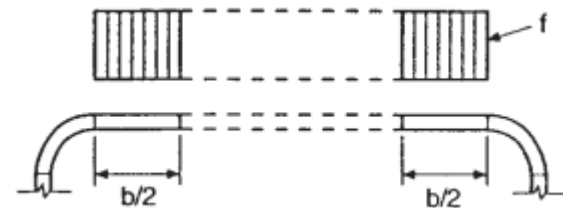
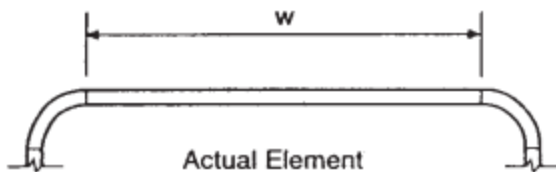


Figure 3.18 Reduction factor ρ vs. slenderness factor λ .



WPLYW ZMIENNOŚCI NAPRĘŻEŃ

$$k = 4 + 2(1 + \psi)^3 + 2(1 + \psi)$$

For $h_0/b_0 \leq 4$

$$b_1 = \frac{b_e}{3 + \psi}$$

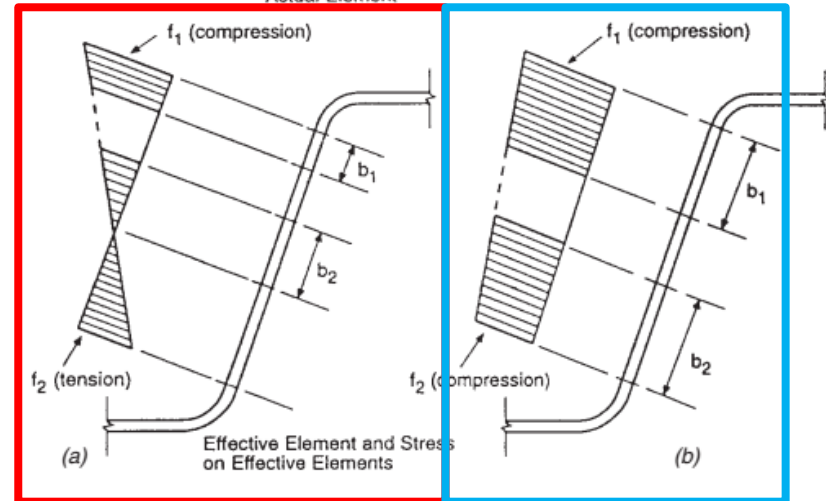
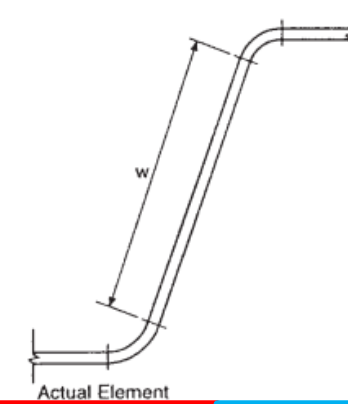
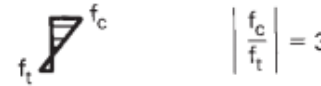
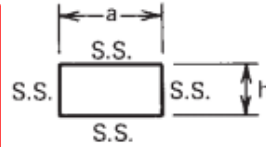
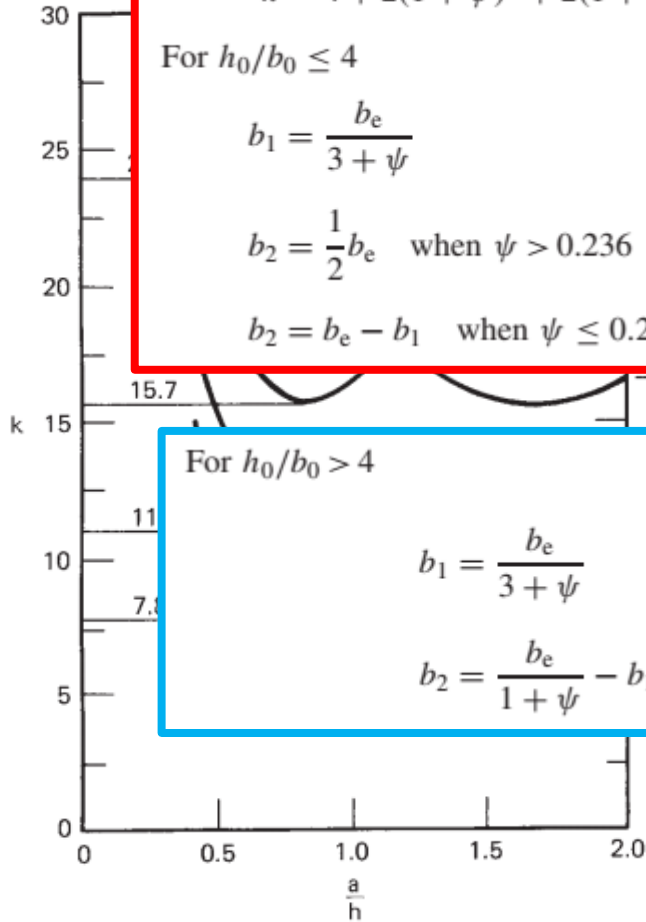
$$b_2 = \frac{1}{2}b_e \quad \text{when } \psi > 0.236$$

$$b_2 = b_e - b_1 \quad \text{when } \psi \leq 0.236$$

For $h_0/b_0 > 4$

$$b_1 = \frac{b_e}{3 + \psi}$$

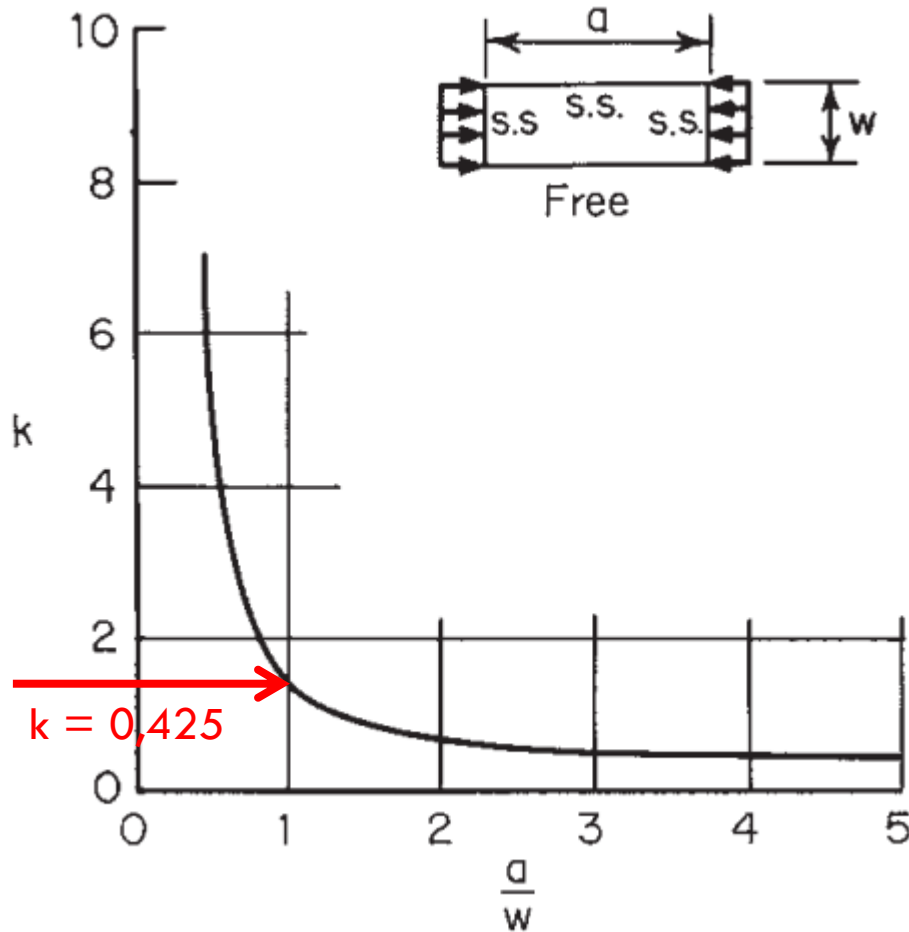
$$b_2 = \frac{b_e}{1 + \psi} - b_1$$



PŁYTA O SWOBODNEJ KRAWĘDZI



PŁYTA O SWOBODNEJ KRAWĘDZI



$$\sigma_{cr} = \frac{k\pi^2 E}{3(1 - \nu^2) \left(\frac{w}{t}\right)^2}$$

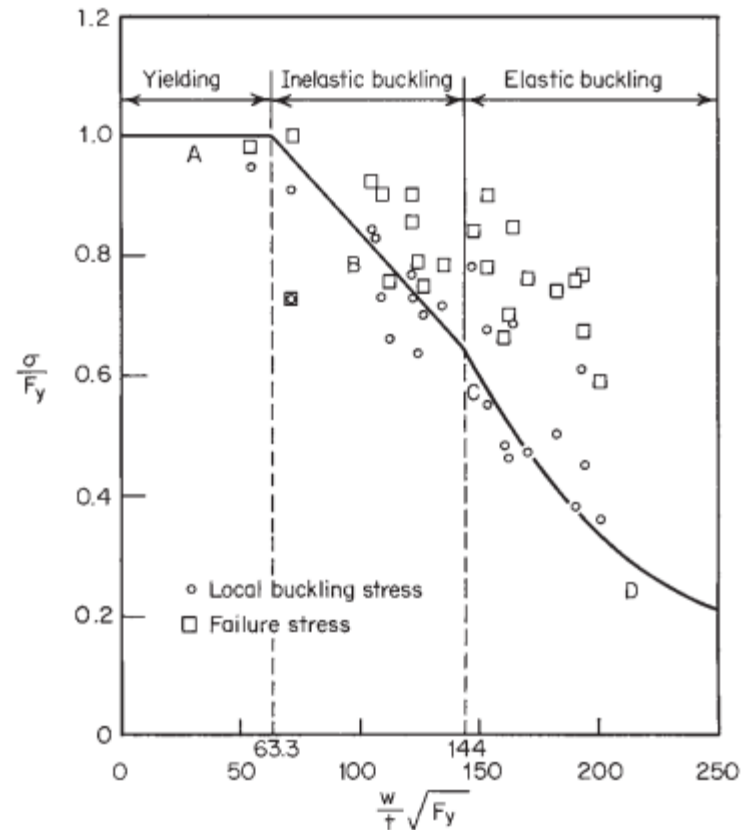


Figure 3.35 Correlation between test data on unstiffened compression elements and predicted maximum stress. ^{1.161,3.13}

SZEROKOŚĆ EFEKTYWNA PŁYTY NIEUSZTYWNIONEJ

Zaproponowane przez Wintera, na podstawie badań doświadczalnych, wyrażenie na szerokość efektywną

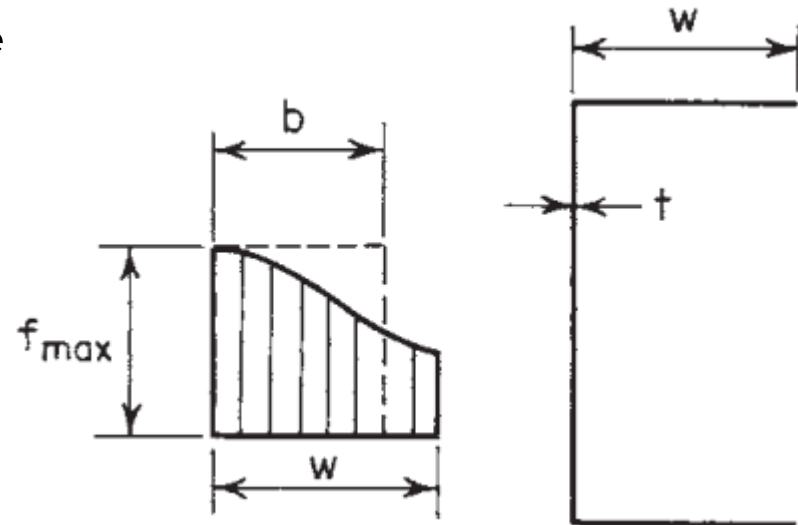
$$b = 0,8t \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\max}}} \left(1 - 0,202 \frac{t}{w} \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\max}}} \right).$$

Przyjmując za $k = 0,5$ szerokość efektywną można wyrazić jako

$$b = 1,13t \sqrt{\frac{kE}{\sigma_{\max}}} \left(1 - 0,286 \frac{t}{w} \sqrt{\frac{kE}{\sigma_{\max}}} \right)$$

i

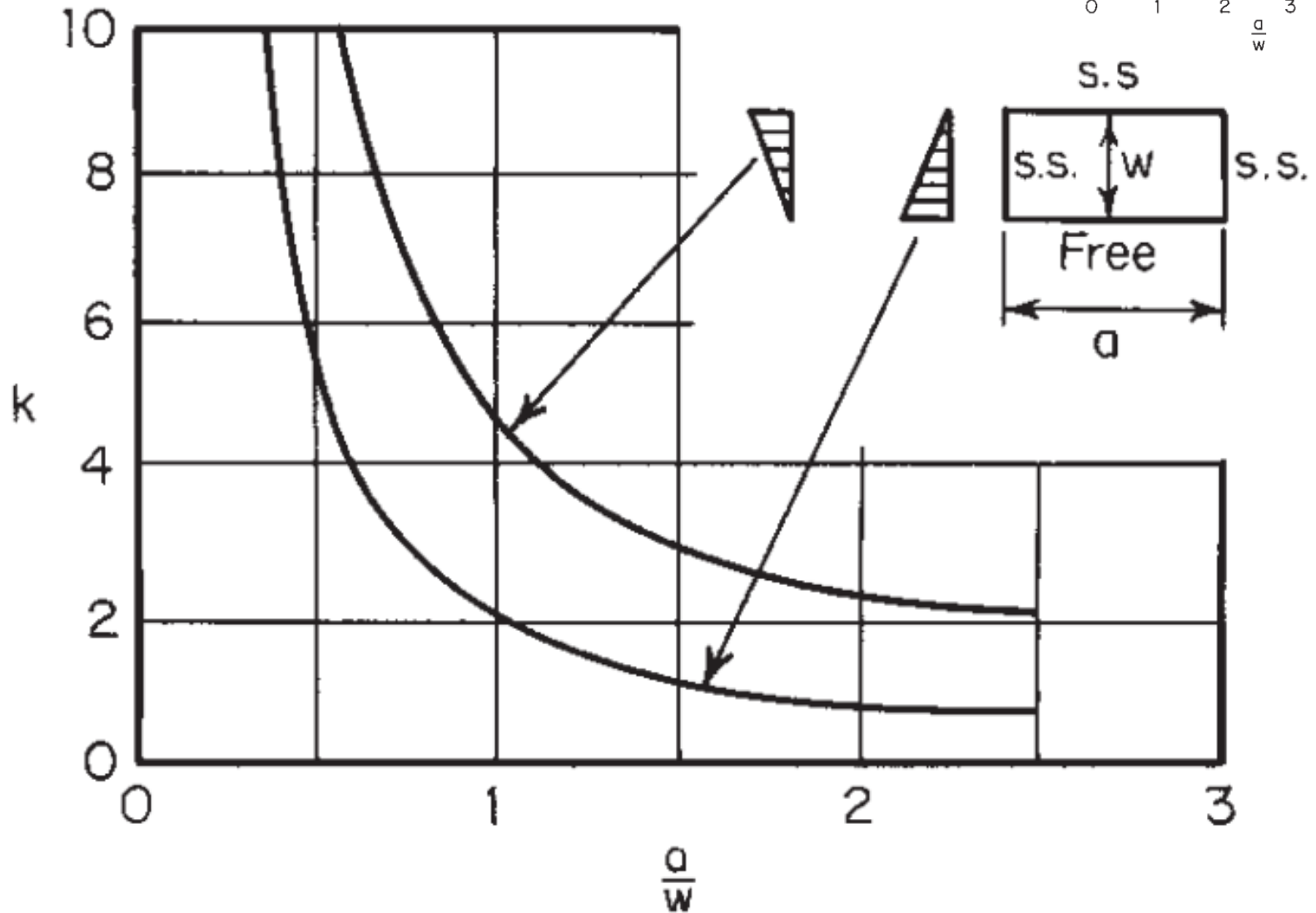
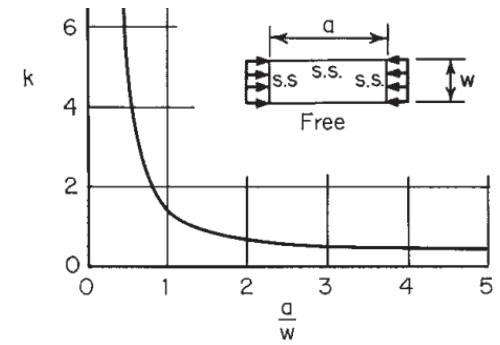
$$\frac{b}{w} = 1,19 \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{\max}}} \left(1 - 0,3 \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{\max}}} \right)$$



Ostatecznie przyjmując współczynnik redukcyjny w funkcji smukłości

$$\rho = \frac{1,19(1 - 0,3/\lambda)}{\lambda}$$

WPLYW ZMIENNOŚCI NAPRĘŻEŃ



WPLYW ZMIENNOŚCI NAPRĘŻEŃ

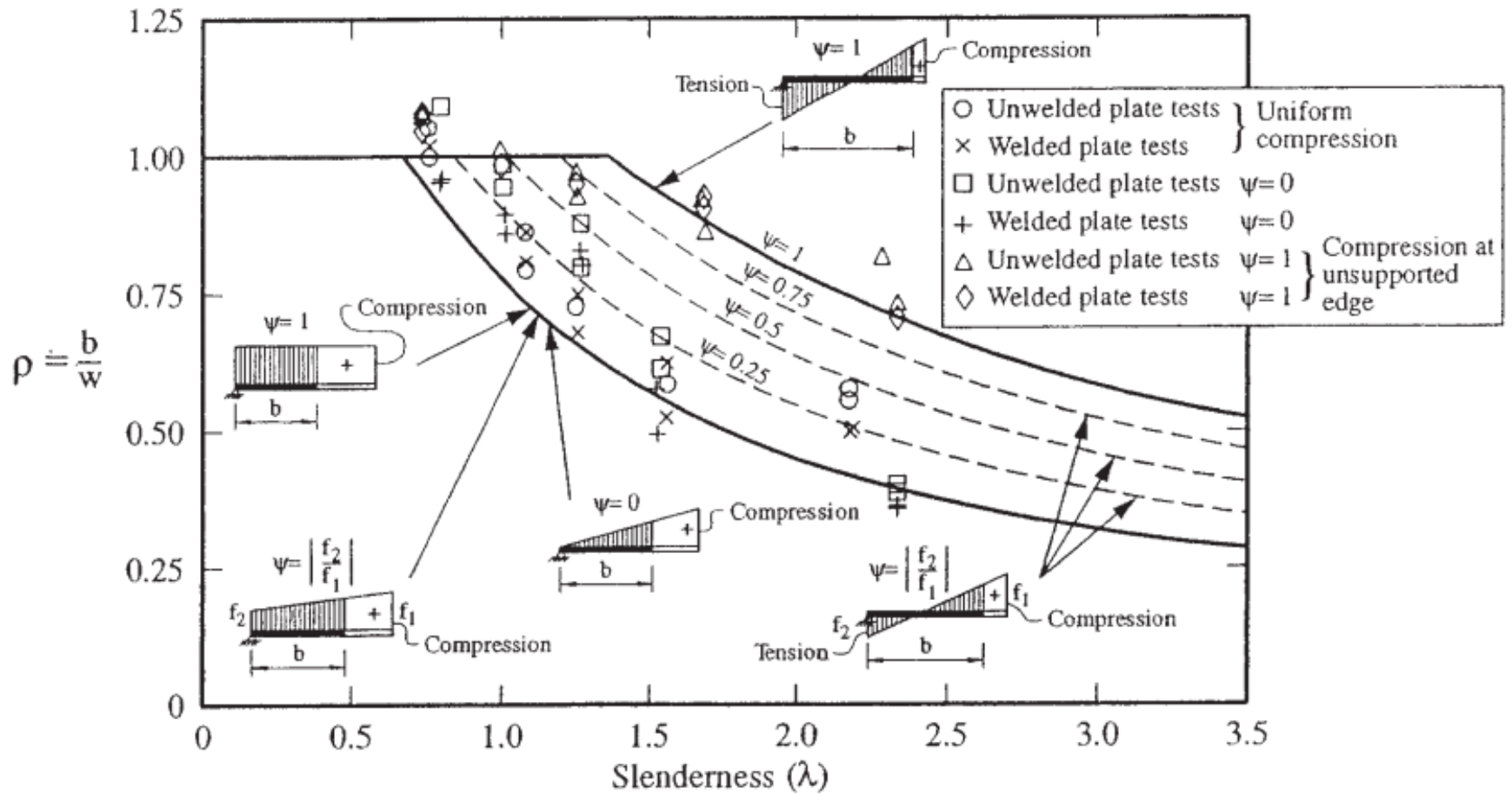
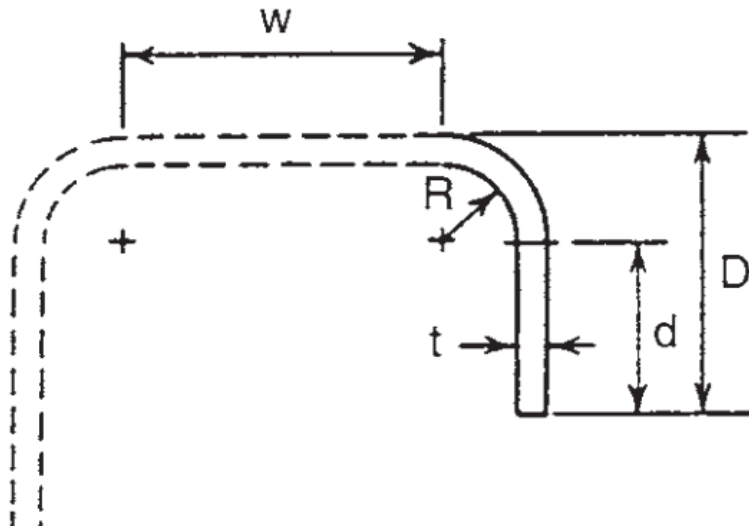


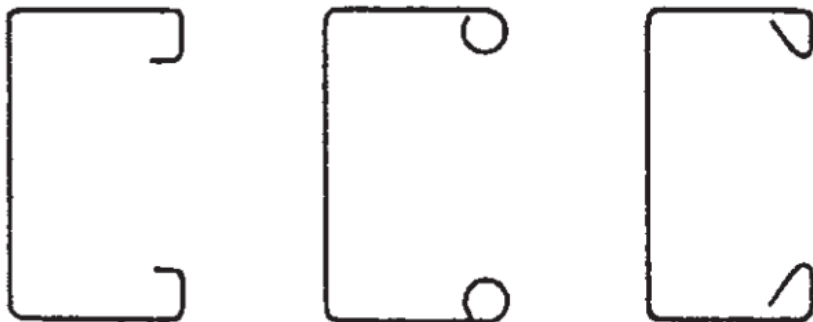
Figure 3.42 Reduction factor ρ vs. slenderness factor λ for unstiffened elements with stress gradient.^{1.346}

WPLYW USZTYWNIENIŃ KRAWĘDZI

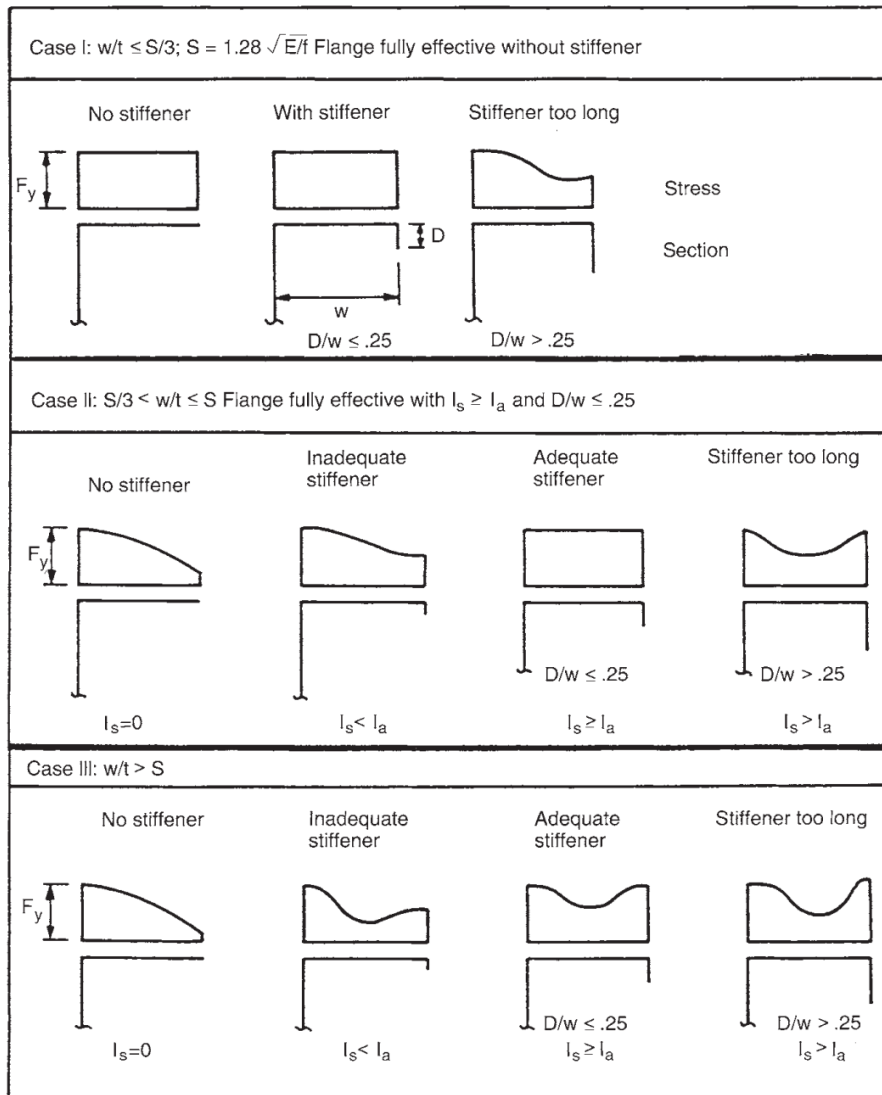
Podstawowy rodzaj usztywnienia krawędzi



Alternatywne sposoby usztywniania krawędzi



WPLYW USZTYWNIENIŃ KRAWĘDZI



I_s - moment bezwładności usztywnienia, obliczony dla pola przekroju pełnej ścianki,

I_a - moment bezwładności usztywnienia o takiej wartości, aby ścianka usztywniania zachowywała się jak płyta podparta

Ocena skuteczności oddziaływania usztywnienia brzegowego na nośność ścianki wg AISI (American Iron and Steel Institute).

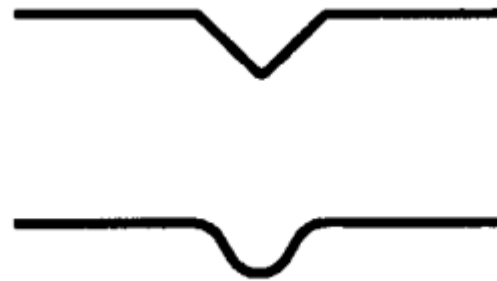
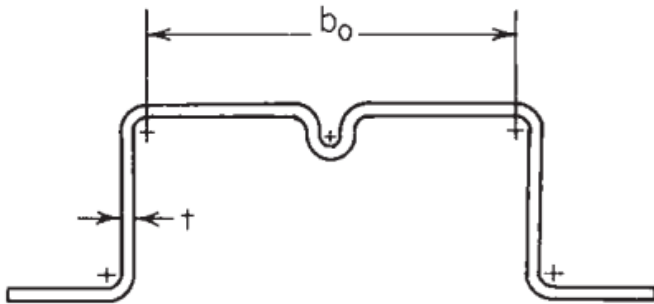
- 1) Stopka w pełni współpracująca,
- 2) Szerokość stopki zastępuje się szerokością współpracującą,
- 3) j.w., lecz przy dużej szerokości stopki.

Figure 3.49 Stress distribution in edge-stiffened flange.^{3,17}

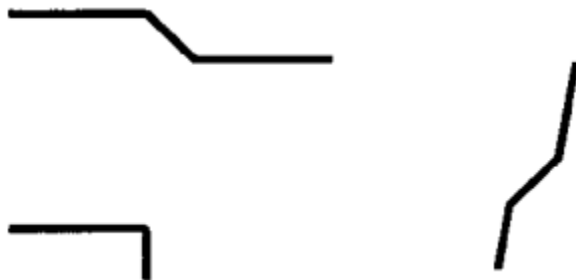
WPLYW USZTYWNIENIŃ POŚREDNICH

Usztywnienia pośrednie projektuje się jako:

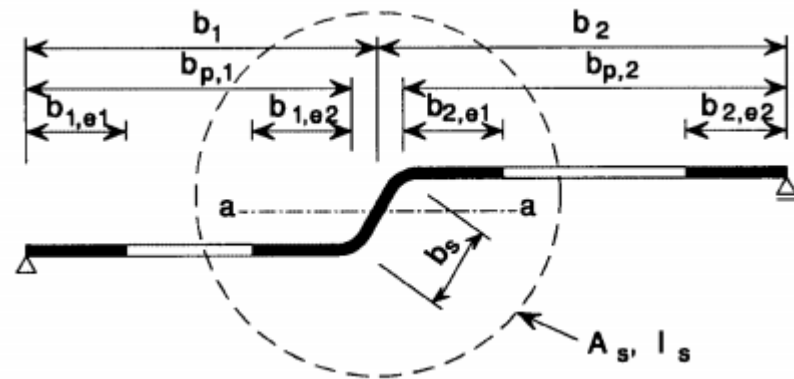
- bruzdy (zazwyczaj na półkach),



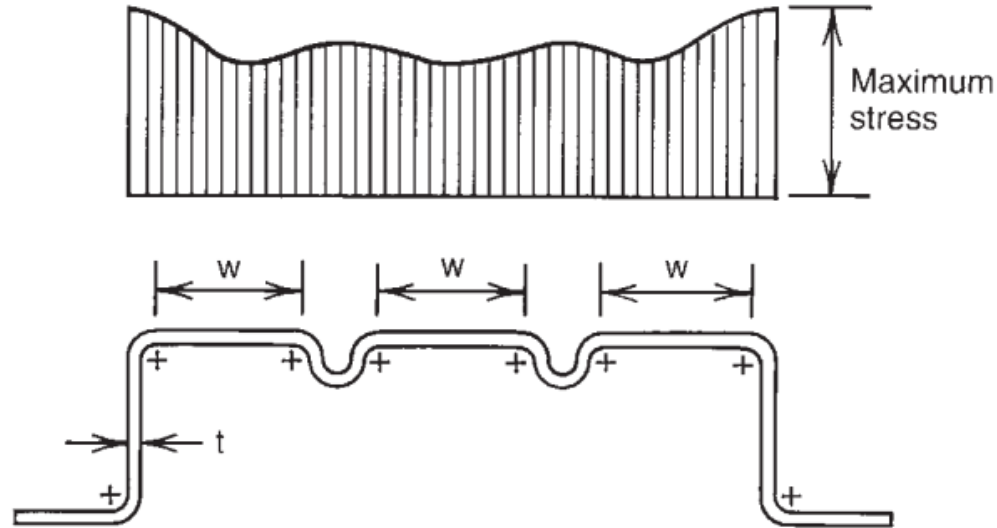
- przegięcia, fałdy (zazwyczaj na środnikach),



- połączeń z kształtownikami



WPLYW USZTYWNIENIŃ POŚREDNICH



Local sub-element buckling



Distortional buckling of the intermediate stiffeners



Distortional buckling of the edge stiffened element

NIESTATECZNOŚĆ ŚCIANEK WG EUROKODÓW

Przekrój efektywny

$$A_{c,eff} = \rho A_c,$$

gdzie współczynnik redukcyjny ρ przyjmuje się w zależności od typu ścianki:

- przęsłowa (płyta podparta na krawędziach)

$$\rho = \begin{cases} 1,0 & \text{dla } \lambda_p \leq 0,673 \\ \frac{\lambda_p - 0,055(3 + \psi)}{\lambda^2} & \text{dla } \lambda_p > 0,673 \end{cases}$$

$$\rho = \frac{1 - 0,22/\lambda}{\lambda}$$

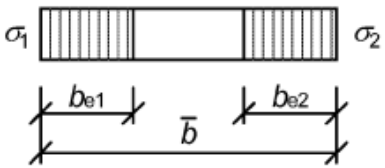
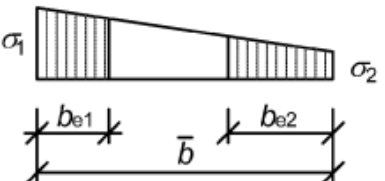
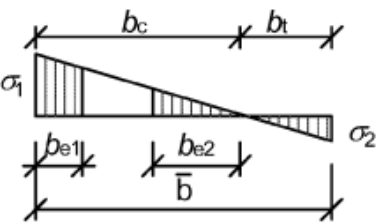
- wspornikowa

$$\rho = \begin{cases} 1,0 & \text{dla } \lambda_p \leq 0,748 \\ \frac{\lambda_p - 0,188}{\lambda^2} & \text{dla } \lambda_p > 0,748 \end{cases}$$

$$\rho = \frac{1,19(1 - 0,3/\lambda)}{\lambda}$$

NIESTATECZNOŚĆ ŚCIANEK WG EUROKODÓW

Tablica 4.1: Ścianki przęsłowe ściskane

Rozkład naprężeń (ściskanie – dodatnie)				Szerokość współpracująca b_{eff}			
				$\psi = 1:$ $b_{eff} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = 0,5 b_{eff}$			$b_{e2} = 0,5 b_{eff}$
				$1 > \psi \geq 0:$ $b_{eff} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = \frac{2}{5 - \psi} b_{eff}$			$b_{e2} = b_{eff} - b_{e1}$
				$\psi < 0:$ $b_{eff} = \rho b_c = \rho \bar{b} / (1 - \psi)$ $b_{e1} = 0,4 b_{eff}$			$b_{e2} = 0,6 b_{eff}$
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	-1	$-1 > \psi > -3$	
Parametr niestateczności miejscowej k_{σ}	4,0	$8,2 / (1,05 + \psi)$	7,81	$7,81 - 6,29\psi + 9,78\psi^2$	23,9	$5,98 (1 - \psi)^2$	

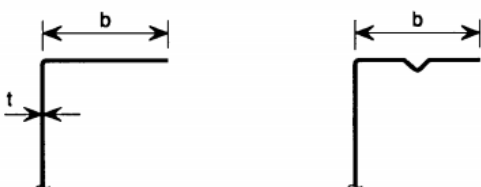
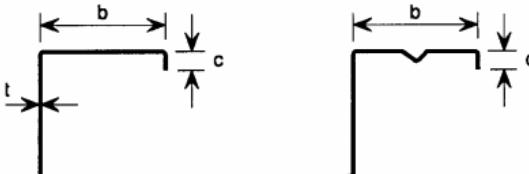
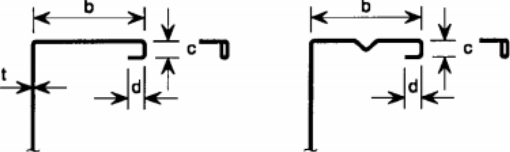
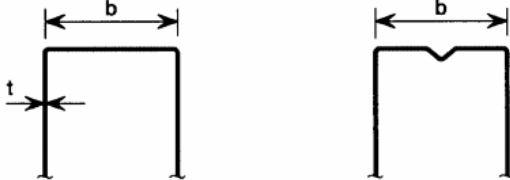

NIESTATECZNOŚĆ ŚCIANEK WG EUROKODÓW

Tablica 4.2: Ścianki wspornikowe ściskane

Rozkład naprężeń (ściskanie – dodatnie)		Szerokość współpracująca b_{eff}			
		$1 > \psi \geq 0$: $b_{eff} = \rho c$			
		$\psi < 0$: $b_{eff} = \rho b_c = \rho c / (1 - \psi)$			
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	0	-1	$1 \geq \psi \geq -3$	
Parametr niestateczności miejscowej k_σ	0,43	0,57	0,85	$0,57 - 0,21\psi + 0,07\psi^2$	
		$1 > \psi \geq 0$: $b_{eff} = \rho c$			
		$\psi < 0$: $b_{eff} = \rho b_c = \rho c / (1 - \psi)$			
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	-1
Parametr niestateczności miejscowej k_σ	0,43	$0,578 / (\psi + 0,34)$	1,70	$1,7 - 5\psi + 17,1 \psi^2$	23,8

ZAKRESY STOSOWANIA

Tablica 5.1: Maksymalne stosunki szerokości do grubości

Część elementu (w przekroju)	Wartość maksymalna
	$b/t \leq 50$
	$b/t \leq 60$ $c/t \leq 50$
	$b/t \leq 90$ $c/t \leq 60$ $d/t \leq 50$
	$b/t \leq 500$
	$45^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$ $h/t \leq 500 \sin \phi$

Podane wartości określają zakres stosowania, dla którego uzyskano wystarczające doświadczenia i weryfikację eksperymentalną.

Dopuszcza się większe smukłości o ile zachowanie zostanie zeryfikowane eksperymentalnie i/lub obliczeniowo, a wyniki potwierdzi odpowiednią liczbą prób.

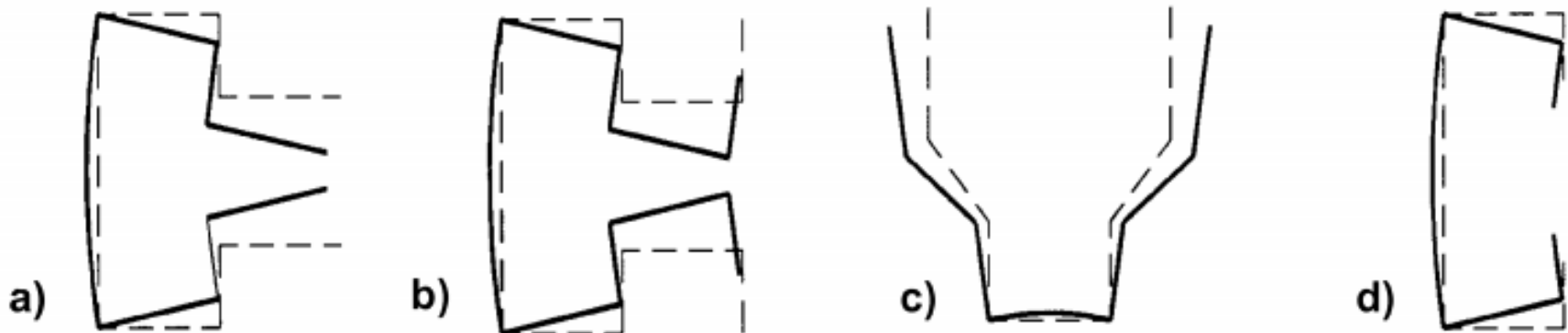
Usztywnienia powinny mieć odpowiednią sztywność i nie powinny przedwcześnie tracić stateczności.

MODELOWANIE ŚCIANEK

Typ ścianki	Model	Typ ścianki	Model

NIESTATECZNOŚĆ MIEJSCOWA

Określając nośność i sztywność profilowanych na zimno elementów i blach należy brać pod uwagę wpływ niestateczności miejscowej i dystorsyjnej.

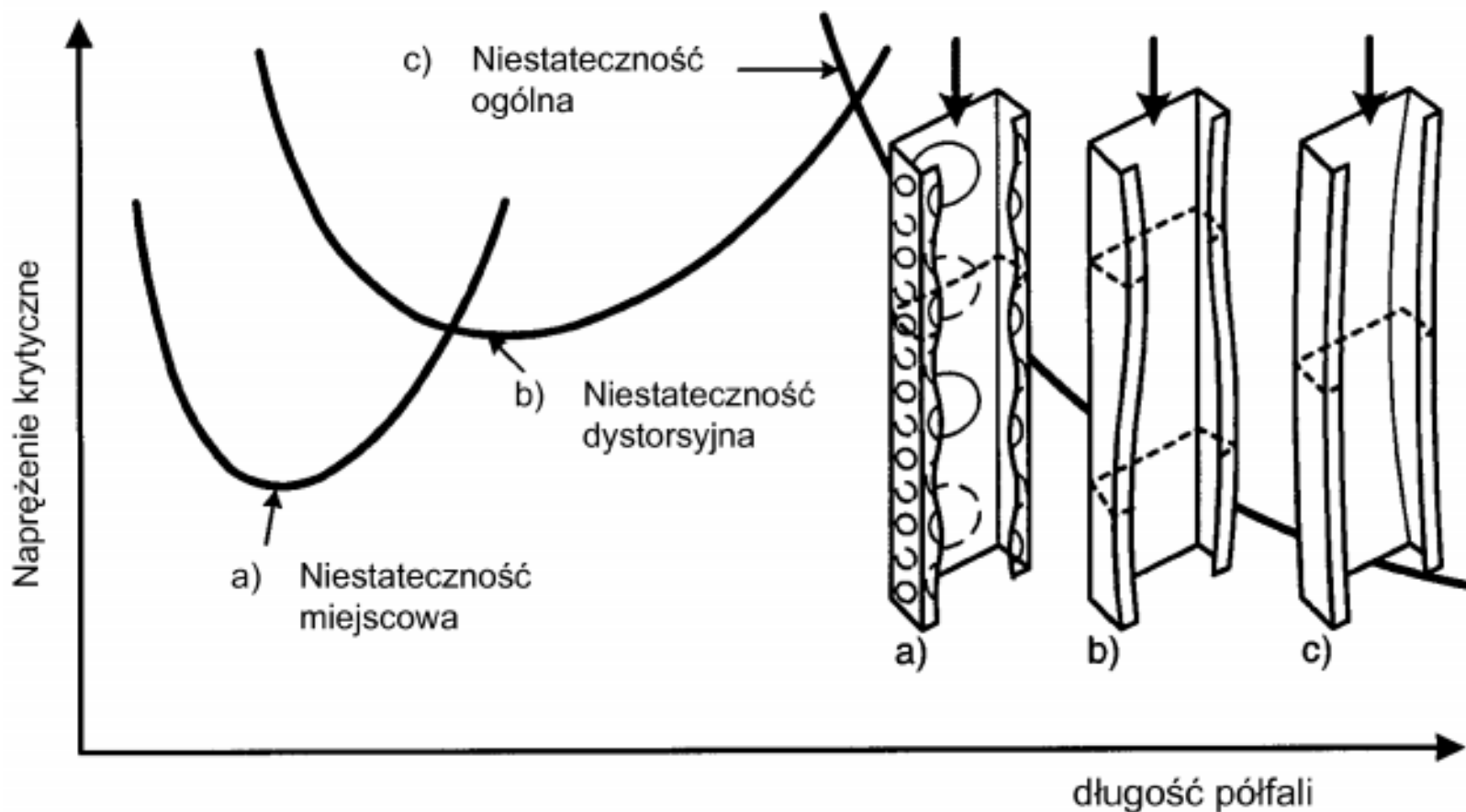


Wpływ niestateczności miejscowej uwzględnia się, stosując efektywne cechy przekroju, obliczone na podstawie szerokości współpracujących, patrz EC3-1-5.

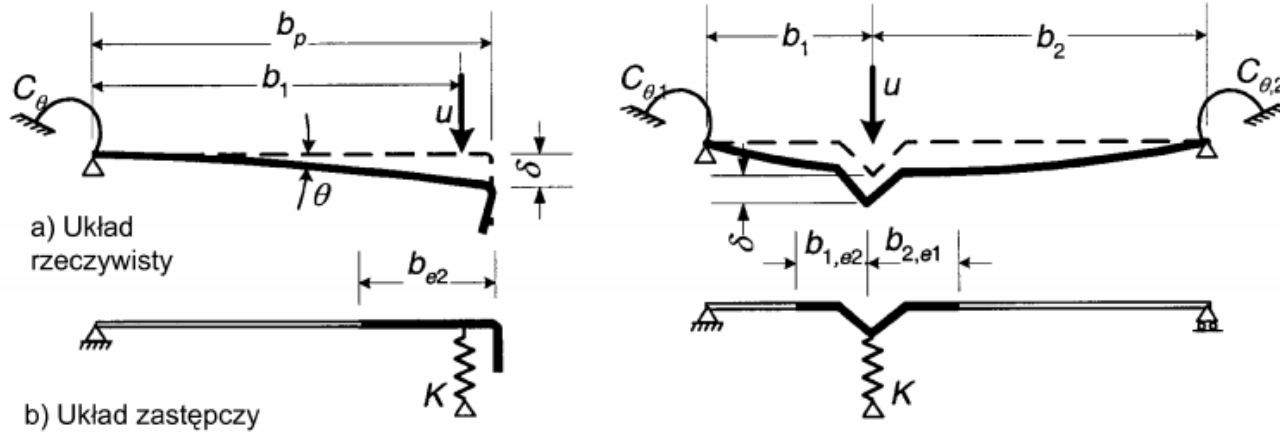
Sprawdzając użyteczność, do wyznaczenia szerokości współpracującej ścianek ściskanych przyjmuje się naprężenia ściskające $\sigma_{com,Ed,ser}$ od obciążeń w stanie granicznym użyteczności.

NIESTATECZNOŚĆ MIEJSCOWA - DYSTORSJA

Wpływ niestateczności dystorsyjnej można określić na podstawie analizy liniowej lub nieliniowej (patrz EC3-1-5), stosując metody numeryczne lub badania próbek ściskanych.



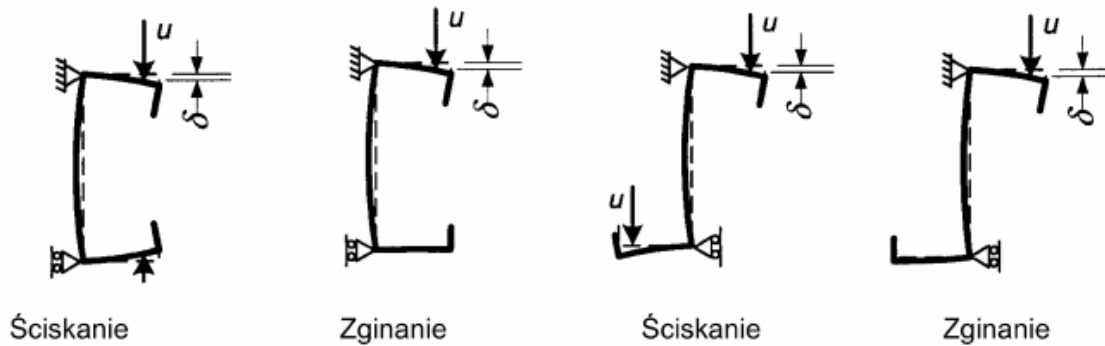
WPLYW USZTYWNIENIĆ



Jednostkowa sztywność translacyjna

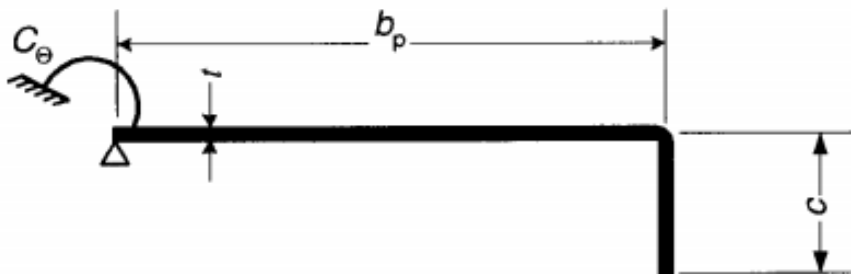
$$K = \frac{u}{\delta}$$

$C_\theta, C_{\theta,1}, C_{\theta,2}$ - sztywności obrotowe

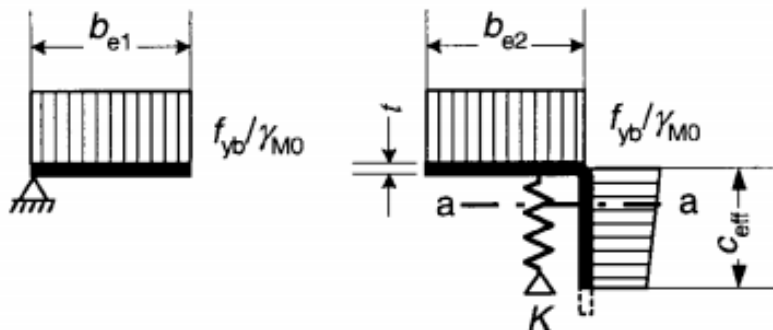


c) Ugięcie δ w kształtownikach C i Z (przy ściskaniu lub zginaniu)

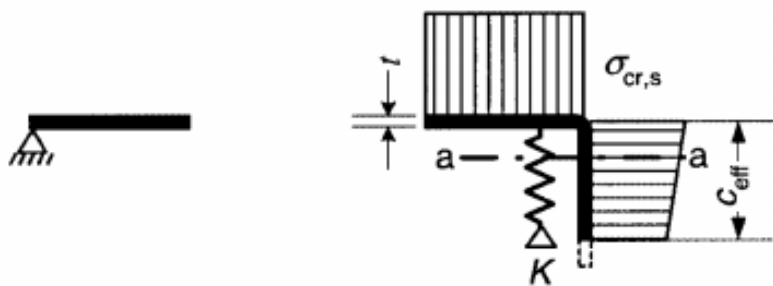
USZTYWNIENIA BRZEGOWE



a) Przekrój brutto i warunki brzegowe

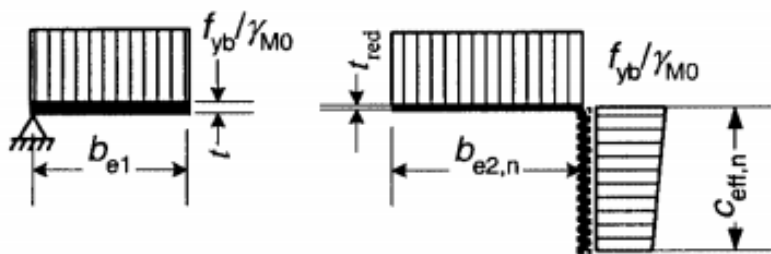
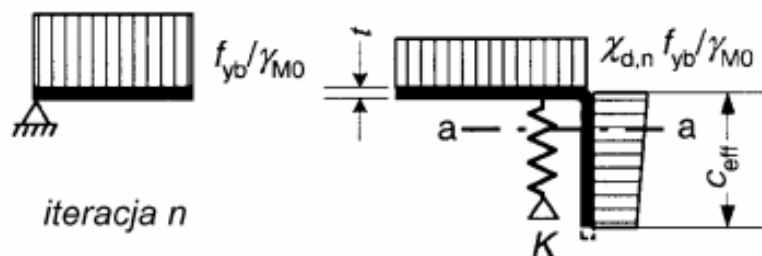
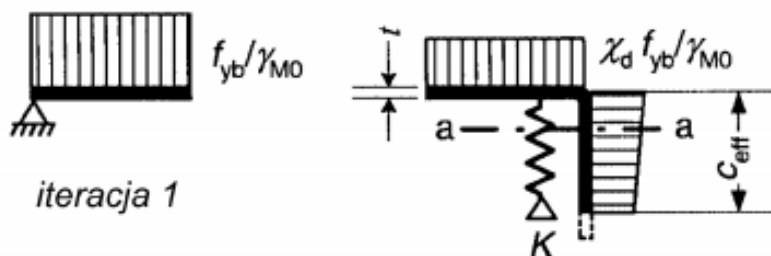


b) **krok 1:** Przekrój efektywny dla $K = \infty$ oraz $\sigma_{com,Ed} = f_{yb}/\gamma_{M0}$



c) **krok 2:** Krytyczne naprężenie sprężyste $\sigma_{cr,s}$ dla efektywnego przekroju usztywnienia A_s z kroku 1

USZTYWNIENIA BRZEGOWE



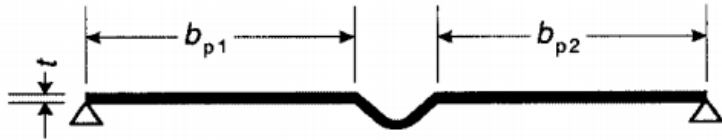
d) Wytrzymałość zredukowana: $\chi_d \tilde{f}_{yb} / \gamma_{M0}$ dla efektywnego przekroju usztywnienia A_s oraz współczynnika χ_d wyznaczonego na podstawie $\sigma_{cr,s}$

e) **krok 3:** Opcjonalnie można powtarzać krok 1 obliczając szerokość współpracującą przy zredukowanych naprężeniach ściskających $\sigma_{com,Ed,i} = \chi_d f_{yb} / \gamma_{M0}$ oraz przyjmując współczynnik χ_d z ostatniej iteracji, aż spełniony będzie warunek $\chi_{d,n} \approx \chi_{d,(n-1)}$ lecz $\chi_{d,n} \leq \chi_{d,(n-1)}$.

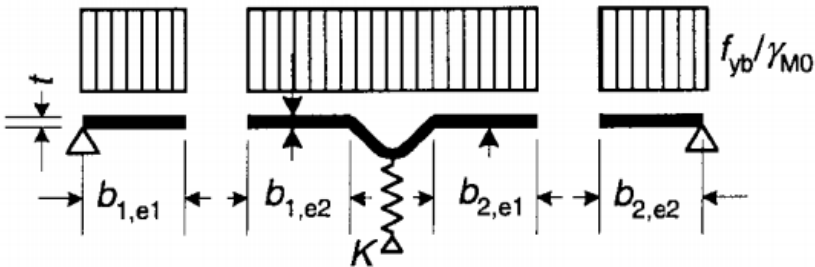
f) Ustalenie przekroju efektywnego o wymiarach b_{e2} , c_{eff} i grubości t_{red} odpowiadającej $\chi_{d,n}$

$$t_{red} = t A_{s,red} / A_s; \quad A_{s,red} = \chi_d A_s \frac{f_{yb} / \gamma_{M0}}{\sigma_{com,Ed}}$$

USZTYWNIENIA POŚREDNIE

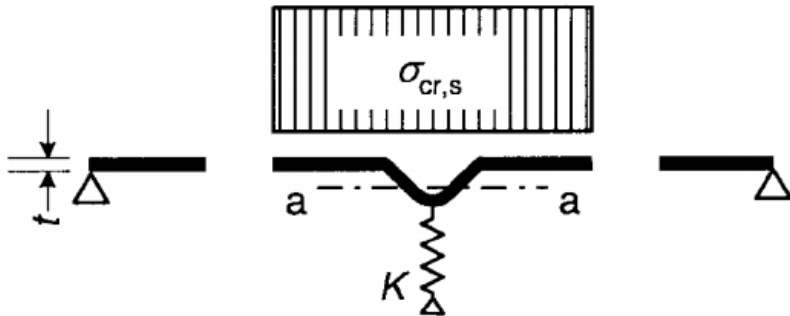


a) Przekrój brutto i warunki brzegowe



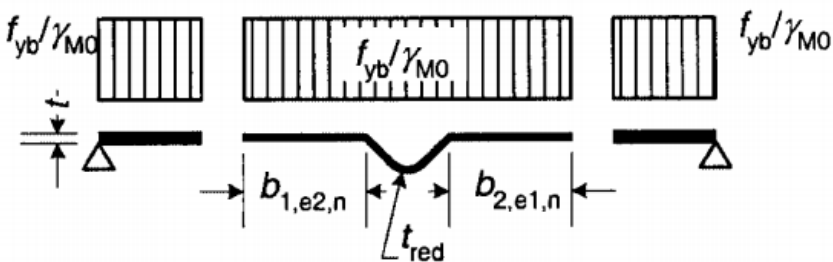
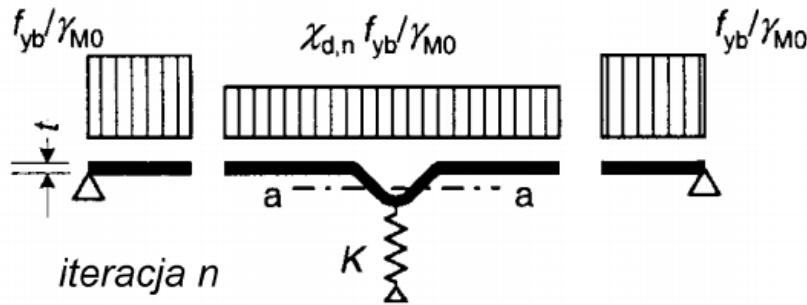
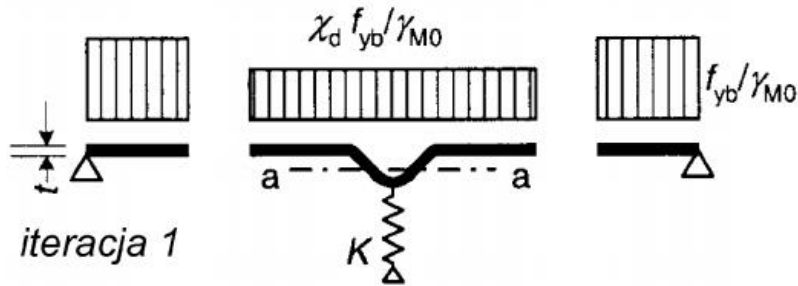
b) **krok 1:** Przekrój efektywny dla $K = \infty$ oraz

$$\sigma_{\text{com,Ed}} = f_{yb} / \gamma_{M0}$$



c) **krok 2:** Krytyczne naprężenie sprężyste $\sigma_{cr,s}$ dla efektywnego przekroju usztywnienia A_s z kroku 1

USZTYWNIENIA POŚREDNIE



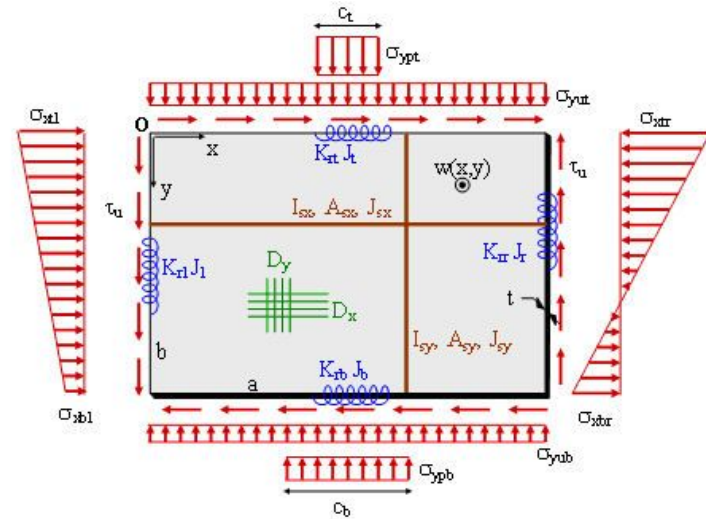
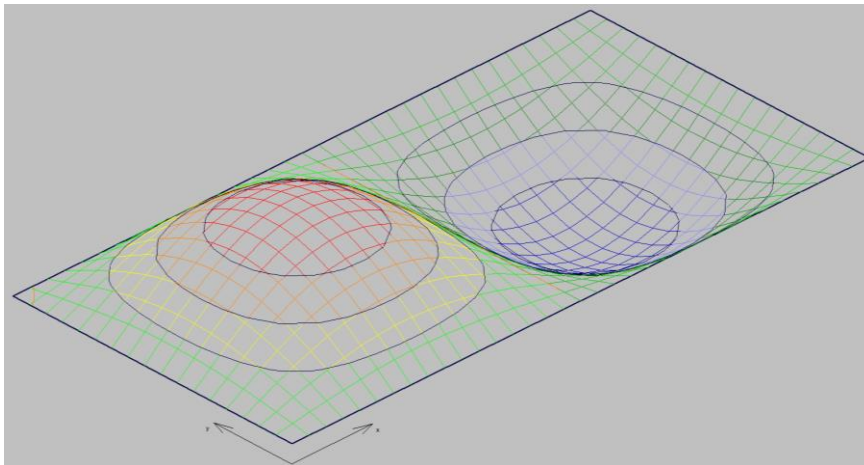
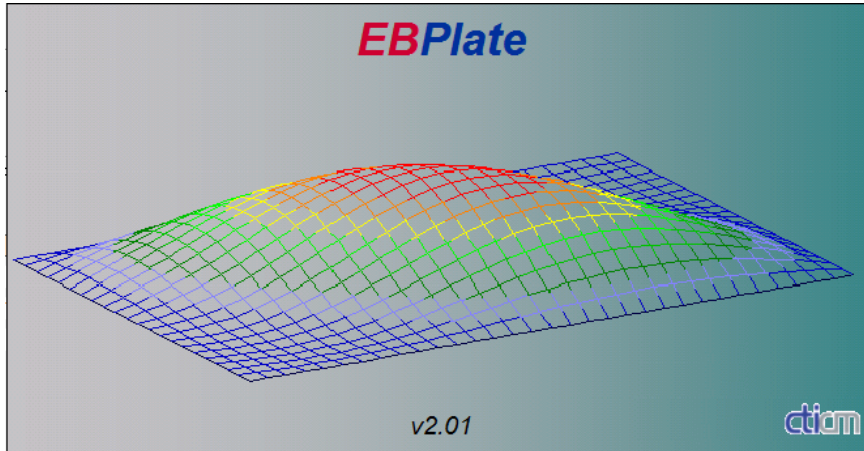
d) Wytrzymałość zredukowana: $\chi_d \tilde{f}_{yb} / \gamma_{M0}$ dla efektywnego przekroju usztywnienia A_s oraz współczynnika χ_d wyznaczonego na podstawie $\sigma_{cr,s}$

e) **krok 3:** Opcjonalnie można powtarzać krok 1 obliczając szerokość współpracującą przy zredukowanych naprężeniach ściskających $\sigma_{com,Ed,i} = \chi_d f_{yb} / \gamma_{M0}$ oraz przyjmując współczynnik χ_d z ostatniej iteracji, aż spełniony będzie warunek

f) Ustalenie przekroju efektywnego o wymiarach b_{e2} , C_{eff} i grubości t_{red} odpowiadającej $\chi_{d,n}$

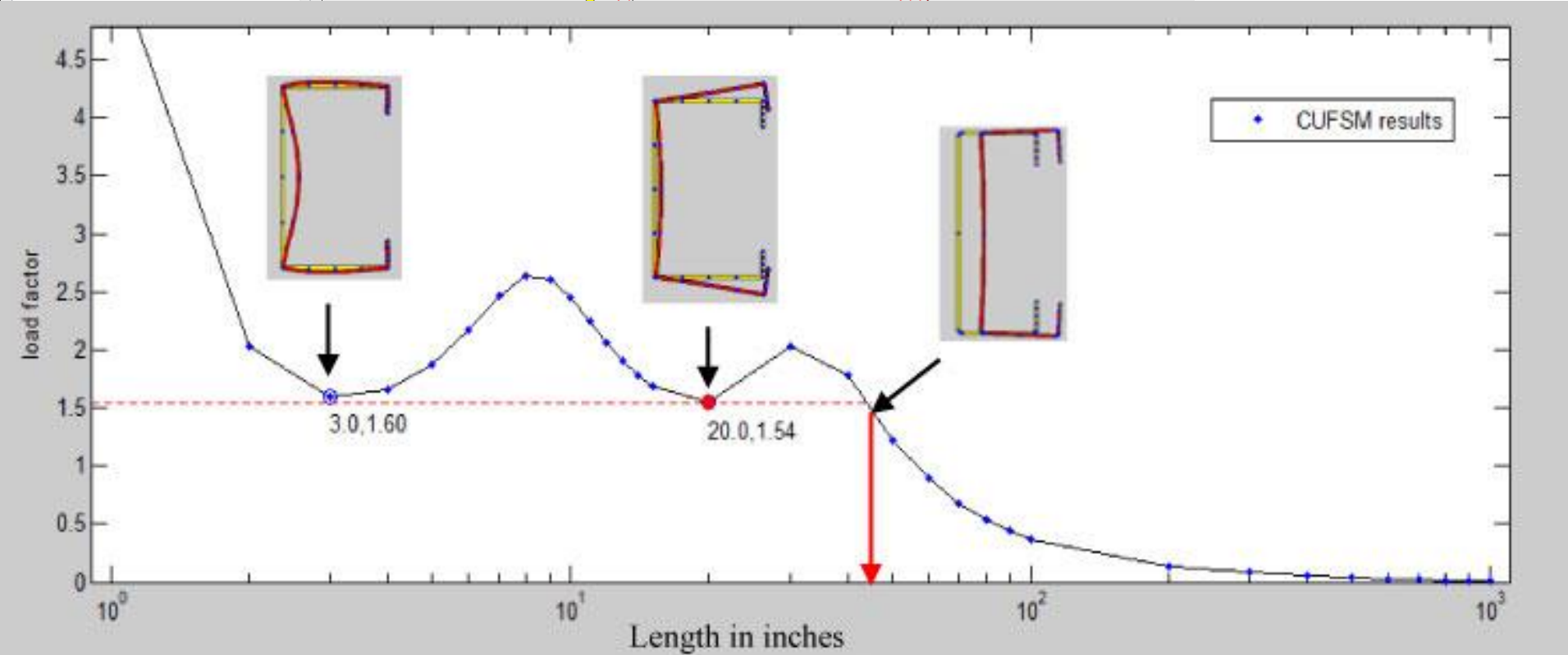
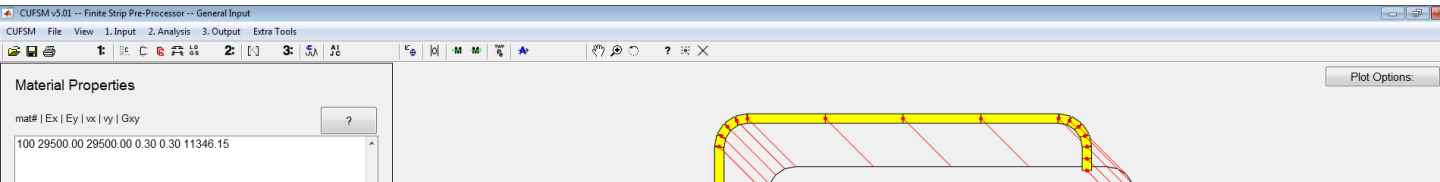
PRAKTYCZNE NARZĘDZIA

EBPlate (CTICM Centre Technique Industriel de la Construction Métallique)



PRAKTYCZNE NARZĘDZIA

CUFSM – Constrained and Unconstrained Finite Strip Method (Ben Shafer)

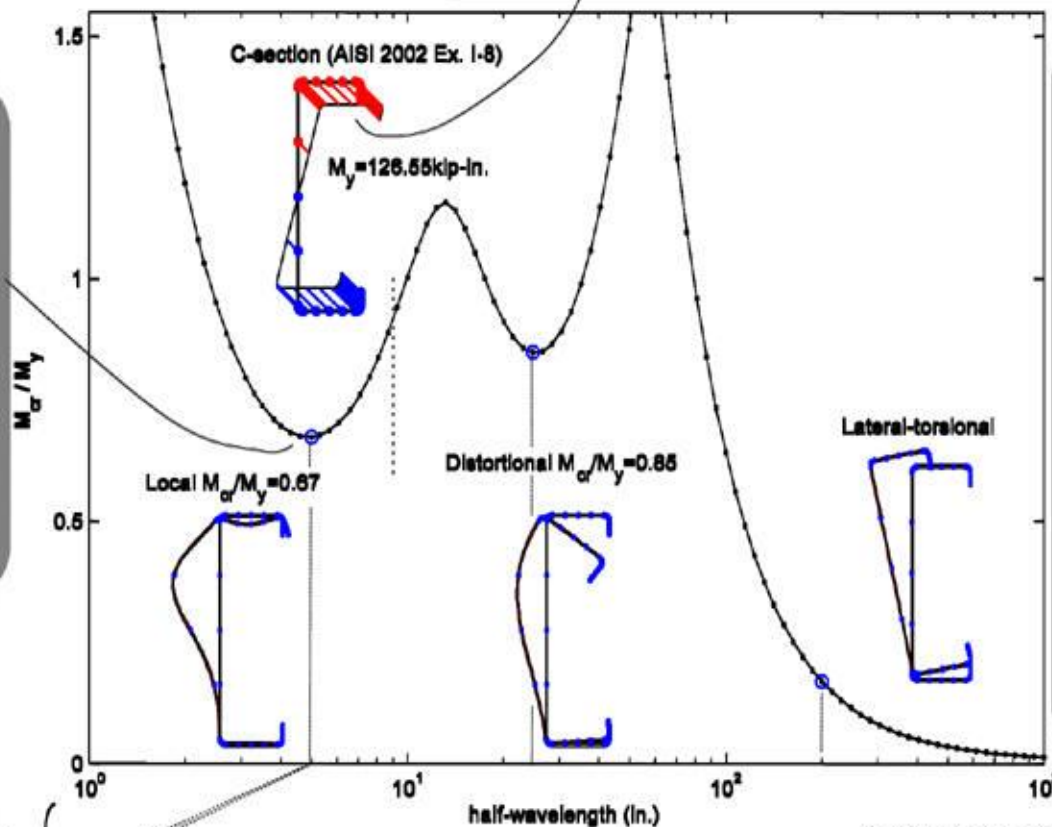


Understanding Finite Strip Analysis Results

Applied stress on the section indicates that a moment about the major axis is applied to this section. All results are given in reference to this applied stress distribution. Any axial stresses (due to bending, axial load, warping torsional stresses, or any combination thereof) may be considered in the analysis.

Minima indicate the lowest load level at which a particular mode of buckling occurs. The lowest M_{cr}/M_y is sought for each type of buckling. An identified cross-section mode shape can repeat along the physical length of the member.

Mode shapes are shown at the identified minima and at 200 in.. Identification of the mode shapes is critical to DSM, as each shape uses a different strength curve to connect the elastic buckling results shown here to the actual ultimate strength. In the section, *local* buckling only involves rotation at internal folds, *distortional* buckling involves both rotation and translation of internal fold lines, and *lateral-torsional* buckling involves "rigid-body" deformation of the cross-section without distortion.



Half-wavelength shows how a given cross-section mode shape (as shown in the figure) varies along its length.

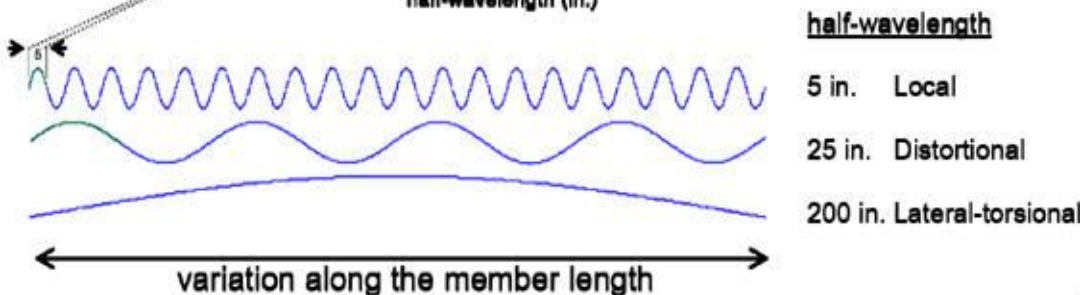


Figure 2 Understanding Finite Strip Analysis Results