

CIENKOŚCIENNE KONSTRUKCJE METALOWE

Wykład 11: Wyznaczanie obciążenia krytycznego sprężystej stateczności przestrzennej ściskanych i zginanych prętów cienkościennych

WSTĘP

Figure 1

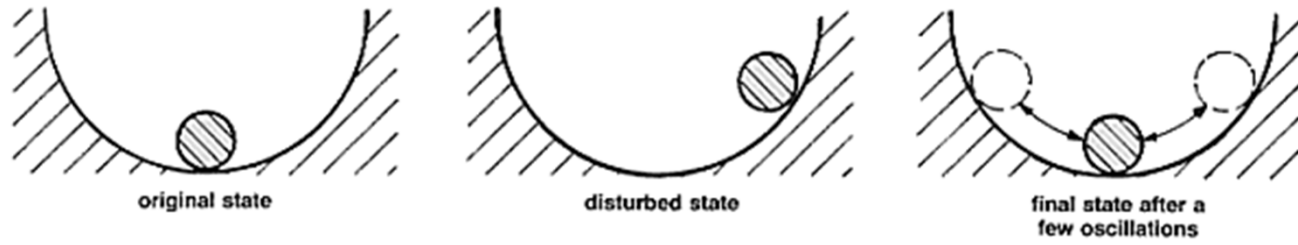


Figure 2

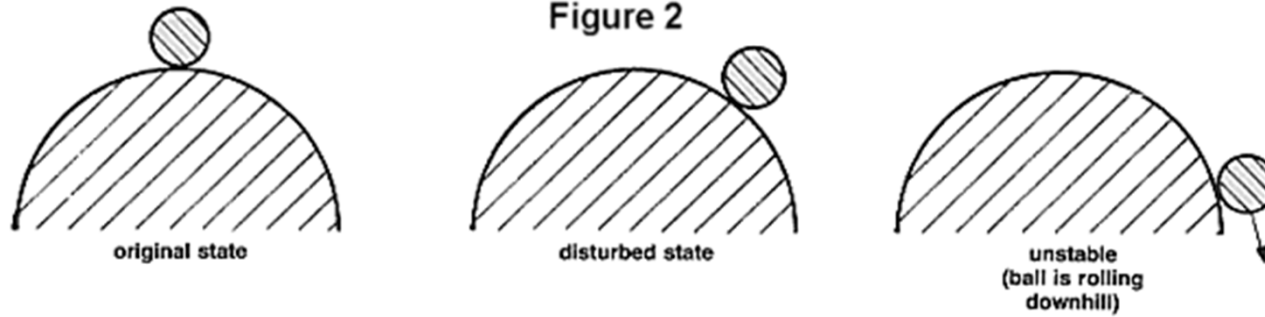


Figure 3

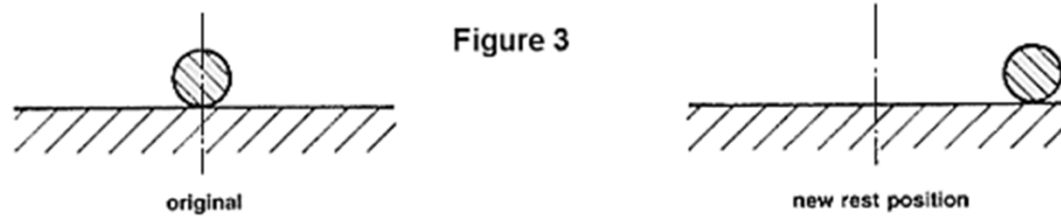
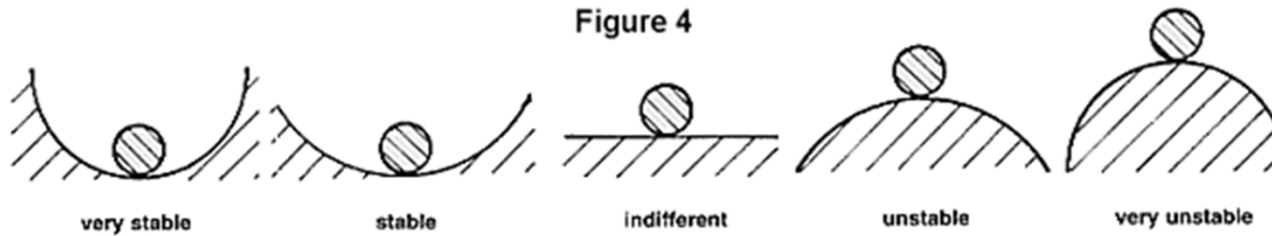
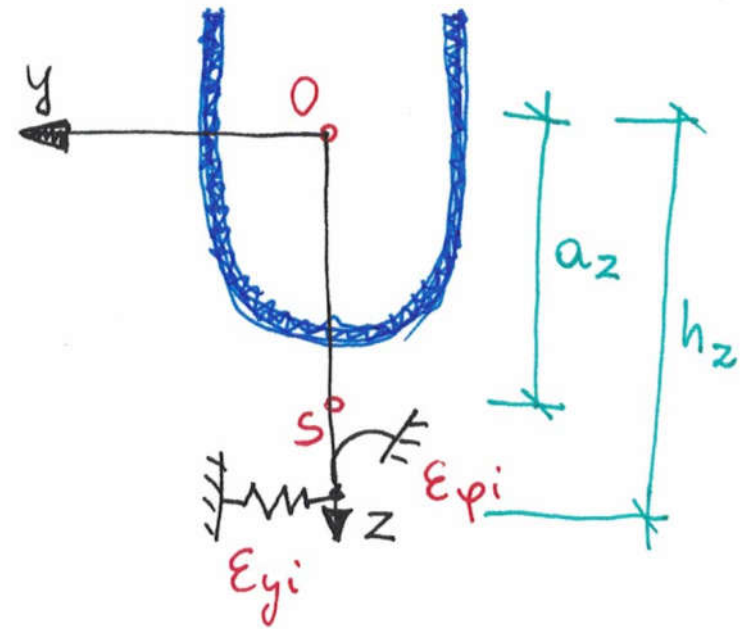
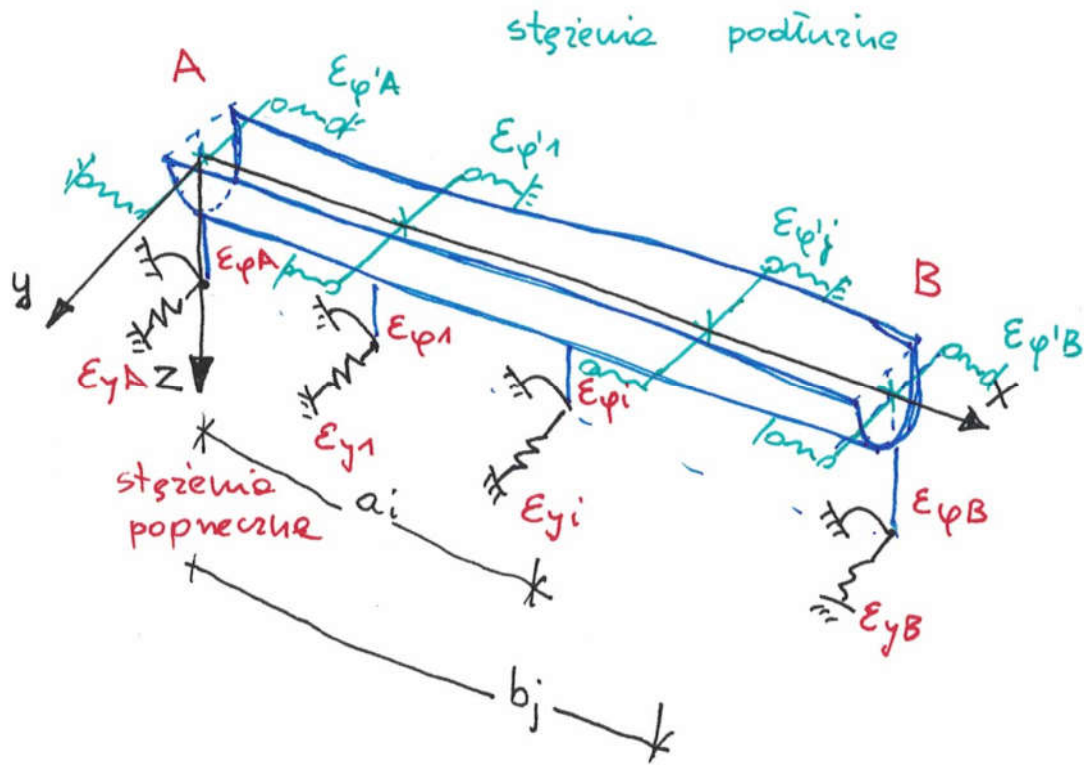


Figure 4



MODEL OBLICZENIOWY



RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE PROBLEMU

$$EI_z v^{(4)} + P v^{(2)} + (P a_z + M_y) \varphi^{(2)} + \sum_{i=1}^m R_y(a_i) \delta(x - a_i) = 0,$$

$$EI_\omega \varphi^{(4)} + [P i_s^2 - GI_T - (r_y - 2a_z) M_y] \varphi^{(2)} + (P a_z + M_y) v^{(2)} + \sum_{i=1}^m M_x(a_i) \delta(x - a_i) - \sum_{j=1}^n B(b_j) \delta^{(1)}(x - b_j) = 0,$$

gdzie: $R_y(a_i)$, $M_x(a_i)$, $B(b_j)$ – składowe obciążenia elementu reakcjami podpór i więzi sprężystych:

$$R_y(a_i) = K_{yi} [v(a_i) + (a_z - h_{zi}) \varphi(a_i)],$$

$$M_x(a_i) = K_{\varphi i} \varphi(a_i) + (a_z - h_{zi}) R_y(a_i),$$

$$B(b_j) = K_{\varphi' j} \varphi^{(1)}(b_j).$$

ROZWIĄZANIE OGÓLNE

$$\begin{aligned}
 v(x) = & \\
 = & v_0 + v_0^{(1)}x + v_0^{(2)} \left[\frac{k_{\varphi m}^2}{2K} + \sum_{k=1}^4 \frac{s_{\varphi zk}^2 + 2k_{\varphi m}^2}{4s_{\varphi zk}^3 s_k} E_k(x) \right] + v_0^{(3)} \left[\frac{k_{\varphi m}^2 x}{2K} + \sum_{k=1}^4 \frac{s_{\varphi zk}^2 + 2k_{\varphi m}^2}{4s_{\varphi zk}^3 s_k} E_k(x) \right] \\
 & - \varphi_0^{(2)} \left[\frac{k_{zm}^2}{2K} + \sum_{k=1}^4 \frac{k_{zm}^2}{2s_{\varphi zk}^2 s_k} E_k(x) \right] - \varphi_0^{(3)} \left[\frac{k_{zm}^2 x}{2K} + \sum_{k=1}^4 \frac{k_{zm}^2}{2s_{\varphi zk}^3 s_k} E_k(x) \right] \\
 & - \frac{1}{EI_z} \sum_{i=1}^m R_y(a_i) \left[\frac{k_{\varphi m}^2 (x - a_i)}{2K} + \sum_{k=1}^4 \frac{s_{\varphi zk}^2 + 2k_{\varphi m}^2}{4s_{\varphi zk}^3 s_k} E_k(x - a_i) \right] H(x - a_i) \\
 & + \frac{1}{EI_\omega} \sum_{i=1}^m M_x(a_i) \left[\frac{k_{zm}^2 (x - a_i)}{2K} + \sum_{k=1}^4 \frac{k_{zm}^2}{2s_{\varphi zk}^3 s_k} E_k(x - a_i) \right] H(x - a_i) \\
 & - \frac{1}{EI_\omega} \sum_{i=1}^n B(b_j) \left[\frac{k_{zm}^2}{2K} + \sum_{k=1}^4 \frac{k_{zm}^2}{2s_{\varphi zk}^3 s_k} E_k(x - b_j) \right] H(x - a_i),
 \end{aligned}$$

ROZWIĄZANIE OGÓLNE

gdzie:

$$i_s^2 = i_0^2 + a_z^2$$

$$2k_z^2 = \frac{P}{EI_z},$$

$$2k_{zm}^2 = \frac{Pa_z + M_y}{EI_z},$$

$$2k_{\varphi m}^2 = \frac{Pi_s^2 - GI_T - (r_y - 2a_z)M_y}{EI_\omega},$$

$$m_z = \frac{I_z}{I_\omega},$$

$$K = k_z^2 k_{\varphi m}^2 - k_{ym}^2 m_z,$$

$$s_k = s_{\varphi zk}^2 + k_z^2 + k_{\varphi m}^2,$$

$$E_k(\xi) = \exp(s_{\varphi zk}\xi) \quad \text{dla } \xi = x, x - a_i, x - b_j,$$

$$s_{\varphi z1,2,3,4} = \pm \sqrt{-(k_z^2 + k_{\varphi m}^2) \pm \sqrt{(k_z^2 - k_{\varphi m}^2)^2 + 4k_{zm}^4 m_z}}.$$

ROZWIĄZANIE SZCZEGÓLNE

Warunki brzegowe:

– na końcach

$$\begin{aligned}v(0) &= \varepsilon_{yA} R_{yA}, & v^{(1)}(0) &= \varepsilon_{y'A} M_{zA}, \\ \varphi(0) &= \varepsilon_{\varphi A} M_{xA}, & \varphi^{(1)}(0) &= \varepsilon_{\varphi'A} B_A, \\ v(l) &= \varepsilon_{yB} R_{yB}, & v^{(1)}(l) &= \varepsilon_{y'B} M_{zB}, \\ \varphi(l) &= \varepsilon_{\varphi B} M_{xB}, & \varphi^{(1)}(l) &= \varepsilon_{\varphi'B} B_B,\end{aligned}$$

– w przęśle

$$\begin{aligned}v(a_i) + (a_z - h_{zi})\varphi(a_i) &= \varepsilon_{yi} R_y(a_i), \\ \varphi(a_i) + \varepsilon_{\varphi i} (a_z - h_{zi}) R_y(a_i) &= \varepsilon_{\varphi i} M_x(a_i), \\ \varphi^{(1)}(b_j) &= \varepsilon_{\varphi' j} B(b_j)\end{aligned}$$

ROZWIĄZANIE SZCZEGÓLNE

Zapisując w postaci macierzowej

$$[\mathbf{B}_{\varphi z}][\mathbf{C}_{\varphi y}] = [\mathbf{0}],$$

gdzie:

$[\mathbf{B}_{\varphi z}]$ – macierz kwadratowa stopnia $r = 8 + 2m + n$ ze współczynników przy niewiadomych,

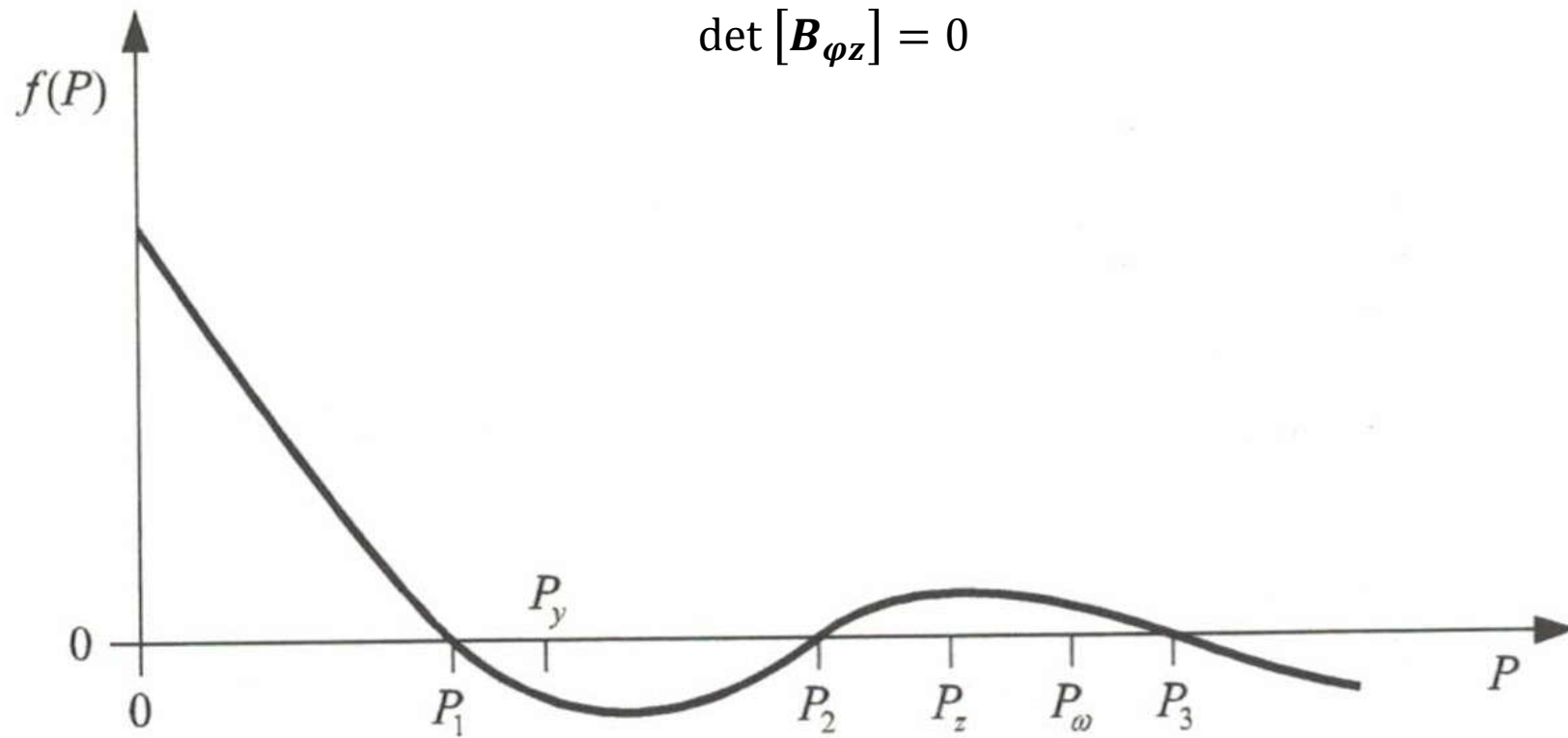
$[\mathbf{C}_{\varphi y}]$ – macierz kolumnowa niewiadomych $(v_0, \dots, \varphi_0^{(3)}, R_y(a_i), M_x(a_i), B(b_j))$,

$[\mathbf{0}]$ – macierz kolumnowa wyrazów wolnych.

Warunek istnienia rozwiązań niezerowych stanowiący kryterium stateczności przestrzennej rozważanego elementu

$$\det [\mathbf{B}_{\varphi z}] = 0.$$

KRYTERIUM STATECZNOŚCI PRZESTRZENNEJ



Rys. 5.12

ELEMENTY NIESTĘŻONE

Wyboczenie giętno-skrętne elementu ściskanego i zginanego

$$i_0^2 P^2 - [i_s^2 (P_{cr,z} + P_{cr,\varphi}) + r_y M_y] P + \\ + \{P_{cr,z} [P_{cr,\varphi} i_s^2 + (r_y - 2a_z) M_y] - M_y^2\} = 0.$$

Wyboczenie giętno-skrętne elementu ściskanego mimośrodowo ($M_y = -P e_z$)

$$[i_0^2 + e_z (r_y - e_z)] P^2 - [i_s^2 (P_{cr,z} + P_{cr,\varphi}) + P_{cr,z} (r_y - 2a_z) e_z] P + \\ + i_s^2 P_{cr,z} P_{cr,\varphi} = 0.$$

Zwicherung elementu zginanego i ściskanego

$$M_y^2 + [r_y (P - P_{cr,z}) + 2a_z P_{cr,z}] M_y + \\ - \{ [P_{cr,z} P_{cr,\varphi} - P (P_{cr,z} + P_{cr,\varphi})] i_s^2 + P^2 i_0^2 \} = 0$$

ELEMENTY NIESTĘŻONE

$$P_{cr,z} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\mu l)^2}, \quad P_{cr,\varphi} = \frac{1}{i_s^2} \left[\frac{\pi^2 EI_\omega}{(\mu l)^2} + GI_T \right]$$

$\mu = 2,0$ – dla sztywnego zamocowania jednego końca i wolnego drugiego (u – w)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yA} = \varepsilon_{\varphi A} = \varepsilon_{y'A} = \varepsilon_{\varphi'A} &= 0, \\ \varepsilon_{yB} = \varepsilon_{\varphi B} = \varepsilon_{y'B} = \varepsilon_{\varphi'B} &= \infty, \end{aligned}$$

$\mu = 2,0$ – dla przegubowego podparcia jednego końca i sztywnego zamocowania z możliwością przemieszczenia i skręcenia na drugim (p – s)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yA} = \varepsilon_{\varphi A} = \varepsilon_{yB} = \varepsilon_{\varphi B} = \varepsilon_{y'B} = \varepsilon_{\varphi'B} &= 0, \\ \varepsilon_{yB} = \varepsilon_{\varphi B} &= \infty, \end{aligned}$$

$\mu = 1,0$ – dla widełkowego podparcia na obu końcach (p – p)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yA} = \varepsilon_{\varphi A} = \varepsilon_{yB} = \varepsilon_{\varphi B} &= 0, \\ \varepsilon_{y'A} = \varepsilon_{\varphi'A} = \varepsilon_{y'B} = \varepsilon_{\varphi'B} &= \infty, \end{aligned}$$

$\mu = 1,0$ – dla utwierdzenia na jednym końcu i sztywnego zamocowania z możliwością przemieszczenia i skręcenia na drugim (u – s)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yA} = \varepsilon_{\varphi A} = \varepsilon_{y'A} = \varepsilon_{\varphi'A} = \varepsilon_{y'B} = \varepsilon_{\varphi'B} &= 0, \\ \varepsilon_{yB} = \varepsilon_{\varphi B} &= \infty, \end{aligned}$$

ELEMENTY NIESTĘŻONE

$$P_{cr,z} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\mu l)^2}, \quad P_{cr,\varphi} = \frac{1}{i_s^2} \left[\frac{\pi^2 EI_\omega}{(\mu l)^2} + GI_T \right]$$

$\mu = 0,6992$ – dla sztywnego zamocowania jednego końca i widelkowego podparcia drugiego końca (u – p)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yA} = \varepsilon_{\varphi A} = \varepsilon_{y'A} = \varepsilon_{\varphi'A} = \varepsilon_{yB} = \varepsilon_{\varphi B} &= 0, \\ \varepsilon_{y'B} = \varepsilon_{\varphi'B} &= \infty, \end{aligned}$$

$\mu = 0,5$ – dla sztywnego zamocowania na obu końcach (u – u)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yA} = \varepsilon_{\varphi A} = \varepsilon_{y'A} = \varepsilon_{\varphi'A} &= 0, \\ \varepsilon_{yB} = \varepsilon_{\varphi B} = \varepsilon_{y'B} = \varepsilon_{\varphi'B} &= \infty. \end{aligned}$$

EL. NIESTĘŻONE – PODPARCIE

- wyboczenia giętno-skrętnego elementu ściskanego i zginanego $N_{\varphi ycr}$

$$(i_s^2 - cy_s^2)N^2 - \{i_s^2(N_y + N_\varphi) + [r_x + 2(c-1)y_s]M_x\}N + \quad (11a)$$

$$+ \{N_y[N_\varphi i_s^2 + (r_x - 2y_s)M_x] - cM_x^2\} = 0,$$

- wyboczenia giętno-skrętnego elementu ściskanego mimośrodowo ($M_x = -Ne_y$) $N_{\varphi ycr}$

$$\{i_s^2 - cy_s^2 + e_y[r_x + 2(c-1)y_s - ce_y]\}N^2 - [i_s^2(N_y + N_\varphi) + \quad (11b)$$

$$+ N_y(r_x - 2y_s)e_y]N + i_s^2 N_y N_\varphi = 0,$$

- zwichrzenia elementu zginanego i ściskanego M_{xcr}

$$cM_x^2 + \{r_x(N - N_y) + 2y_s[N(c-1) + N_y]\}M_x - \quad (11c)$$

$$- [(N - N_y)(N - N_\varphi)i_s^2 - cy_s^2 N^2] = 0.$$

W równaniach (11):

$$N_y = \frac{\pi^2 E I_y}{(\mu_y l)^2}, \quad N_\varphi = \frac{1}{i_s^2} \left[\frac{\pi^2 E I_\omega}{(\mu_\varphi l)^2} + G I_t \right], \quad (12)$$

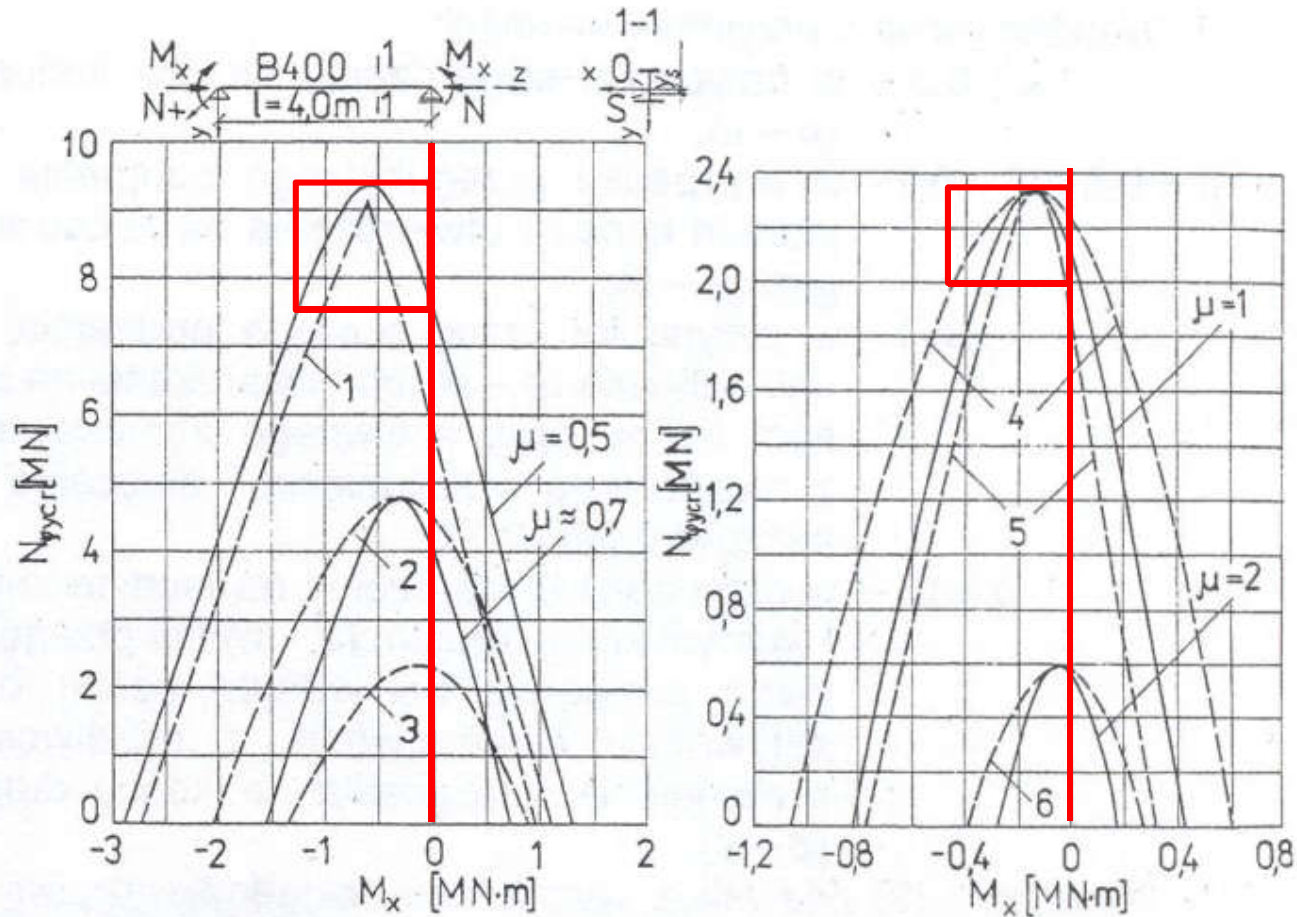
EL. NIESTĘŻONE – PODPARCIE

Wartości współczynników μ_y , μ_φ i c

Podparcie w płaszczyźnie		Współczynniki długości wyboyczeniowej		Współczynnik c w równaniach	
xz	xy	μ_y	μ_φ	(11a-c)	(11c) przy $N = 0$
$u-u$	$u-p$	0,5	0,7	0,78	0,83
$u-p$	$u-u$	0,7	0,5	0,78	0,81
$p-p$	$u-u$	1	0,5	0,77	0,79
$p-p$	$u-p$	1	0,7	0,83	0,85
$u-s$	$u-w$	1	2	0,83	0,85
$u-w$	$u-s$	2	1	0,79	0,80

Oznaczenia sposobu podparcia: p – przegubowe, u – utwierdzenie, w – wolny koniec, s – sztywne zamocowanie z możliwością przemieszczenia.

KRZYWE INTERAKCJI



Rys. 2. Wpływ momentu zginającego M_x na nośność krytyczną wyboczenia giętno-skrętnego $N_{\phi ycr}$ monosymetrycznego słupa, przy różnych warunkach podparcia na końcach: 1 – $xz (u-u)/xy (u-p)$, 2 – $xz (u-p)/xy (u-u)$, 3 – $xz (p-p)/xy (u-u)$, 4 – $xz (p-p)/xy (u-p)$, 5 – $xz (u-s)/xy (u-w)$, 6 – $xz (u-w)/xy (u-s)$

MODEL Z USTALONĄ OSIĄ OBROTU

- słup ściskany i zginany

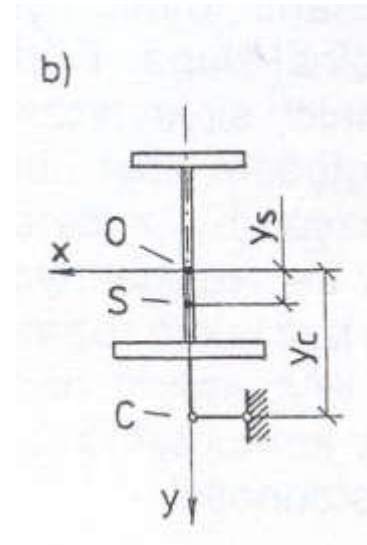
$$N_{\bar{\varphi}cr} = \frac{1}{i_o^2 + y_c^2} \left\{ \frac{\pi^2 E [I_\omega + (y_s - y_c)^2 I_y]}{(\mu_\varphi l)^2} + Gl_t + (r_x - 2y_c) M_x \right\}, \quad (15)$$

- słup ściskany mimośrodowo ($M_x = -Ne_y$)

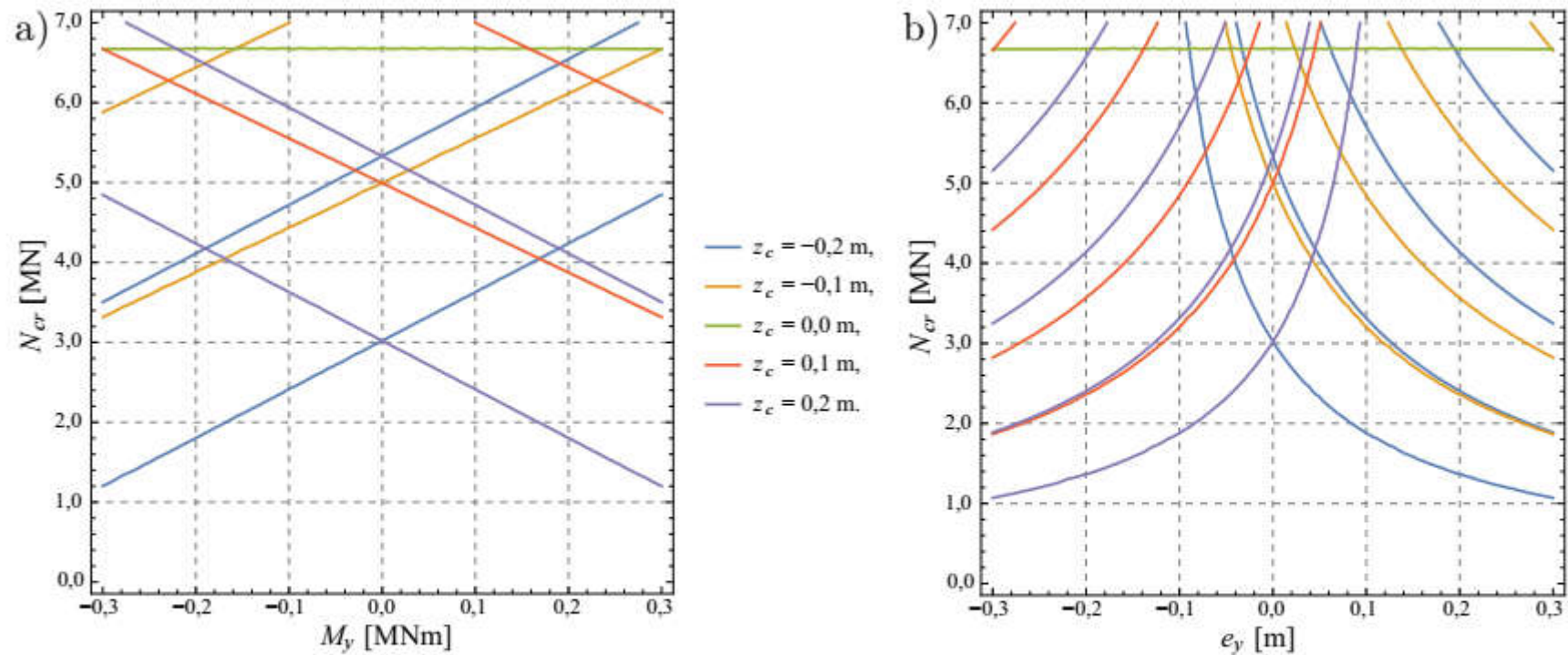
$$N_{\bar{\varphi}cr} = \frac{1}{i_o^2 + y_c^2 + (r_x - 2y_c)e_y} \left\{ \frac{\pi^2 E [I_\omega + (y_s - y_c)^2 I_y]}{(\mu_\varphi l)^2} + Gl_t \right\}. \quad (16)$$

leżność na moment krytyczny słupa z ustaloną osią obrotu, poddanego ściskaniu i zginaniu

$$M_{xcr} = \frac{1}{2y_c - r_x} \left\{ \frac{\pi^2 E [I_\omega + (y_s - y_c)^2 I_y]}{(\mu_\varphi l)^2} + Gl_t - N(i_o^2 + y_c^2) \right\}. \quad (17)$$

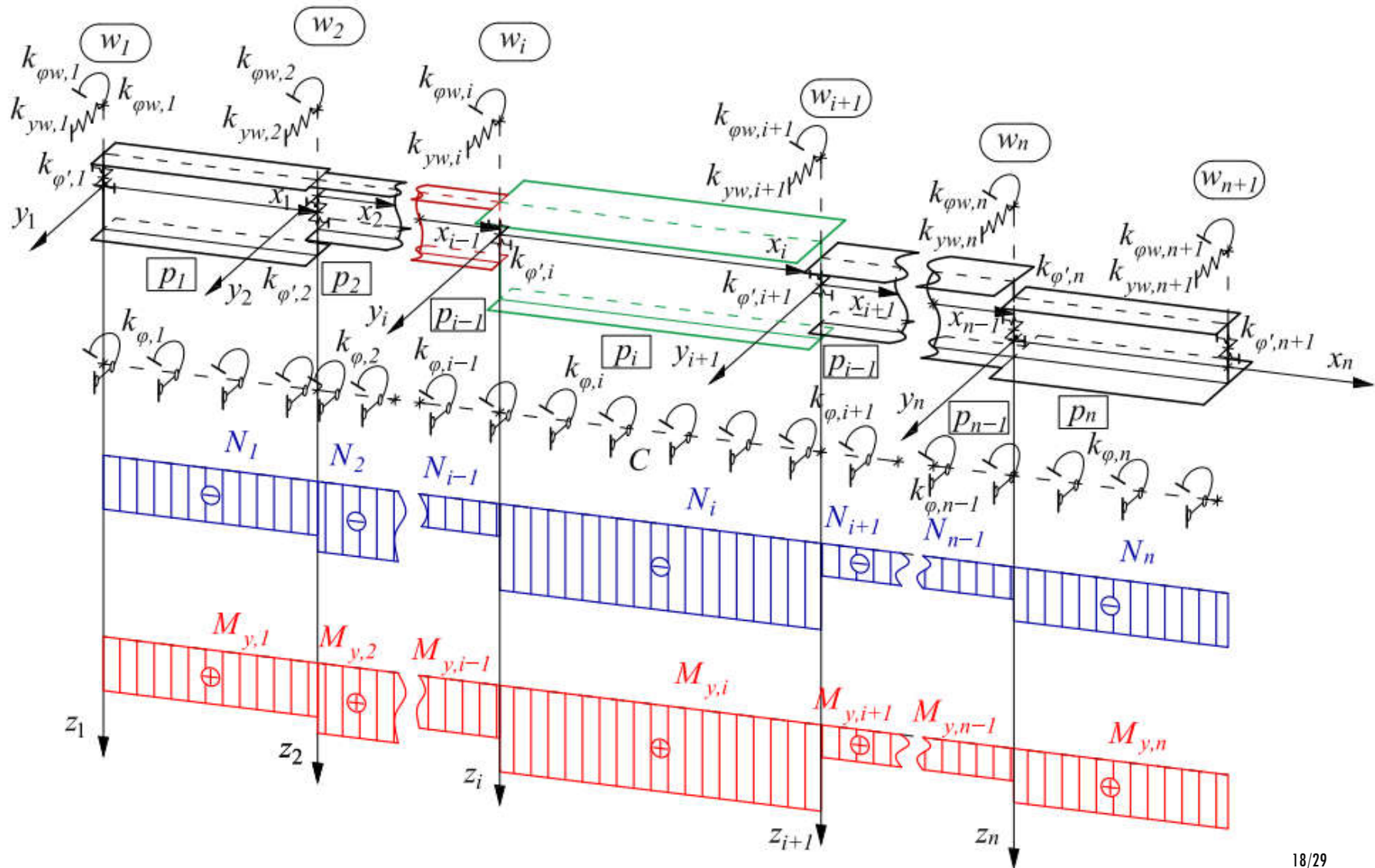


KRZYWE INTERAKCJI



Rys. 6.3. Weryfikacja zależności sił krytycznych w oparciu o rozwiązania podane w [82], w przypadku: a) ściskania i zginania, b) mimośrodkowego ściskania

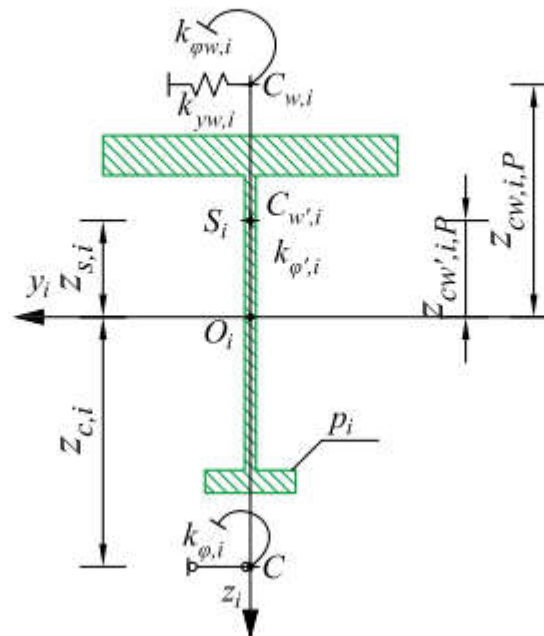
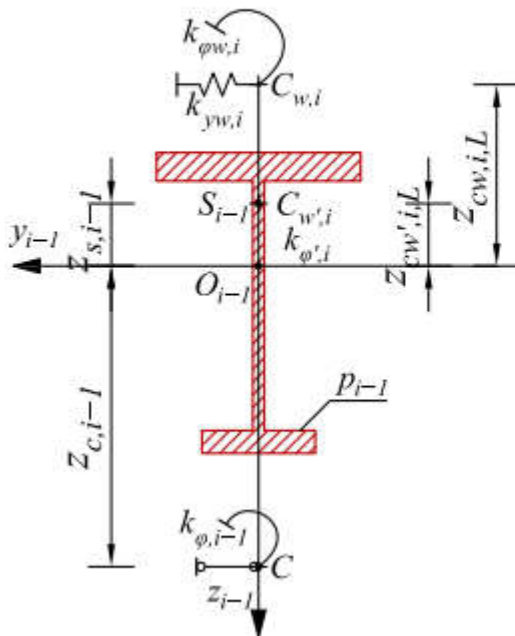
MODEL O ODCINKOWO ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI



MODEL O ODCINKOWO ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI

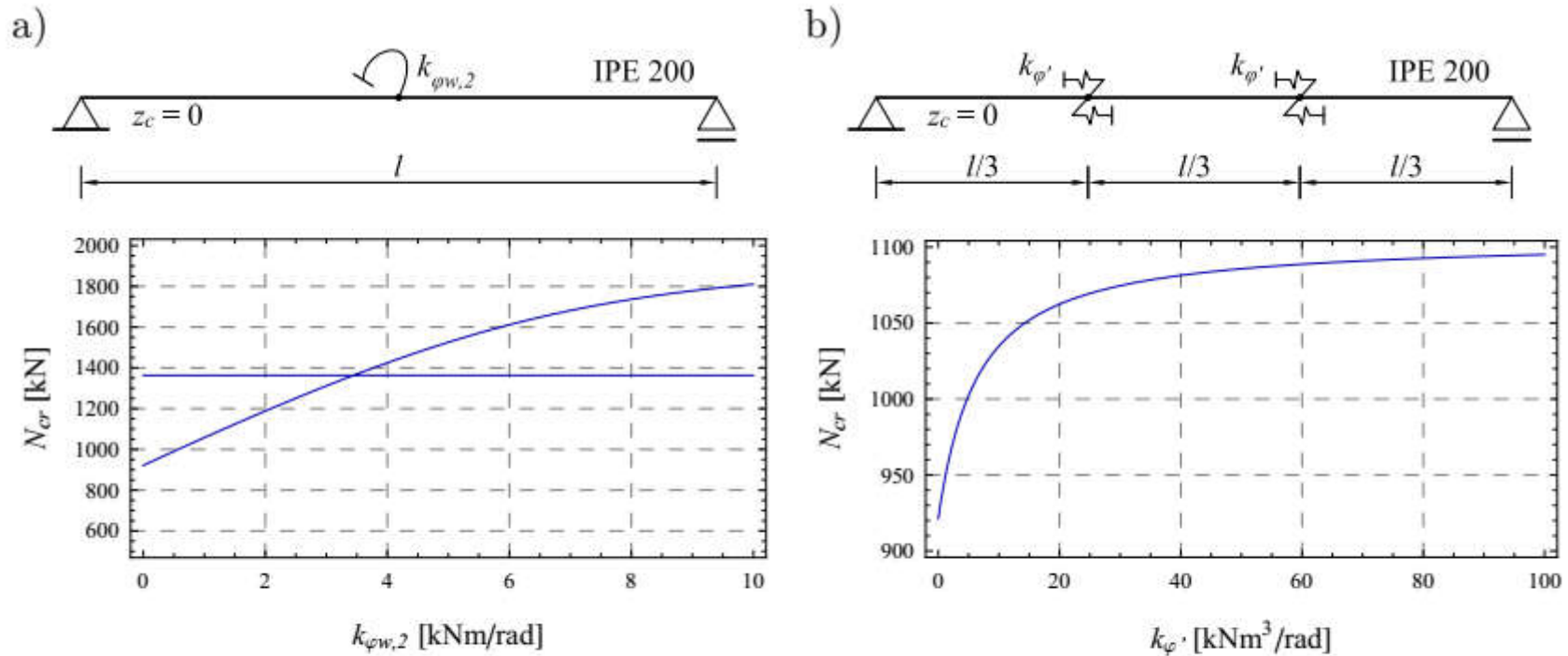
$$\begin{aligned} & \left[EI_{\omega,i} + (z_{s,i} - z_{c,i})^2 EI_{z,i} \right] \varphi^{(4)} + \\ & + \left[N_i \left(i_{0,i}^2 + z_{c,i}^2 \right) - GI_{T,i} - (\beta_{y,i} - 2z_{c,i}) M_{y,i} \right] \varphi^{(2)} + \\ & + k_{\varphi,i} \varphi = 0. \end{aligned}$$

Przekroje i -tego węzła (w_i)
sąsiadujących prętów p_{i-1} i p_i



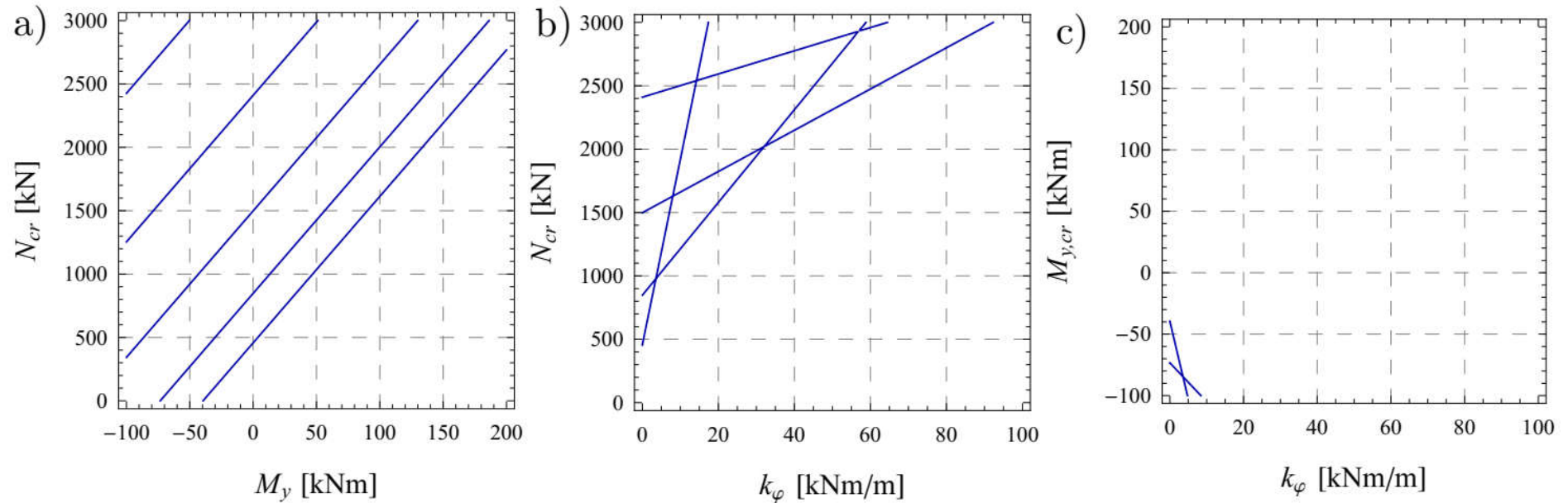
- S_i – oś środków ścinania,
- C – narzucona oś obrotu,
- $C_{w',i}$ – punktowe stężenie podłużne (bimomentowe),
- $C_{w,i}$ – punktowe stężenie poprzeczne

MODEL O ODCINKOWO ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI



Rys. 6.10. Zależność sił krytycznych wyoboczenia skrętnego N_{cr} od sztywności skrętnej $k_{\varphi w,2}$ środkowego podparcia (a) oraz sztywności bimomentowej $k_{\varphi'}$ stężeń podłużnych (b)

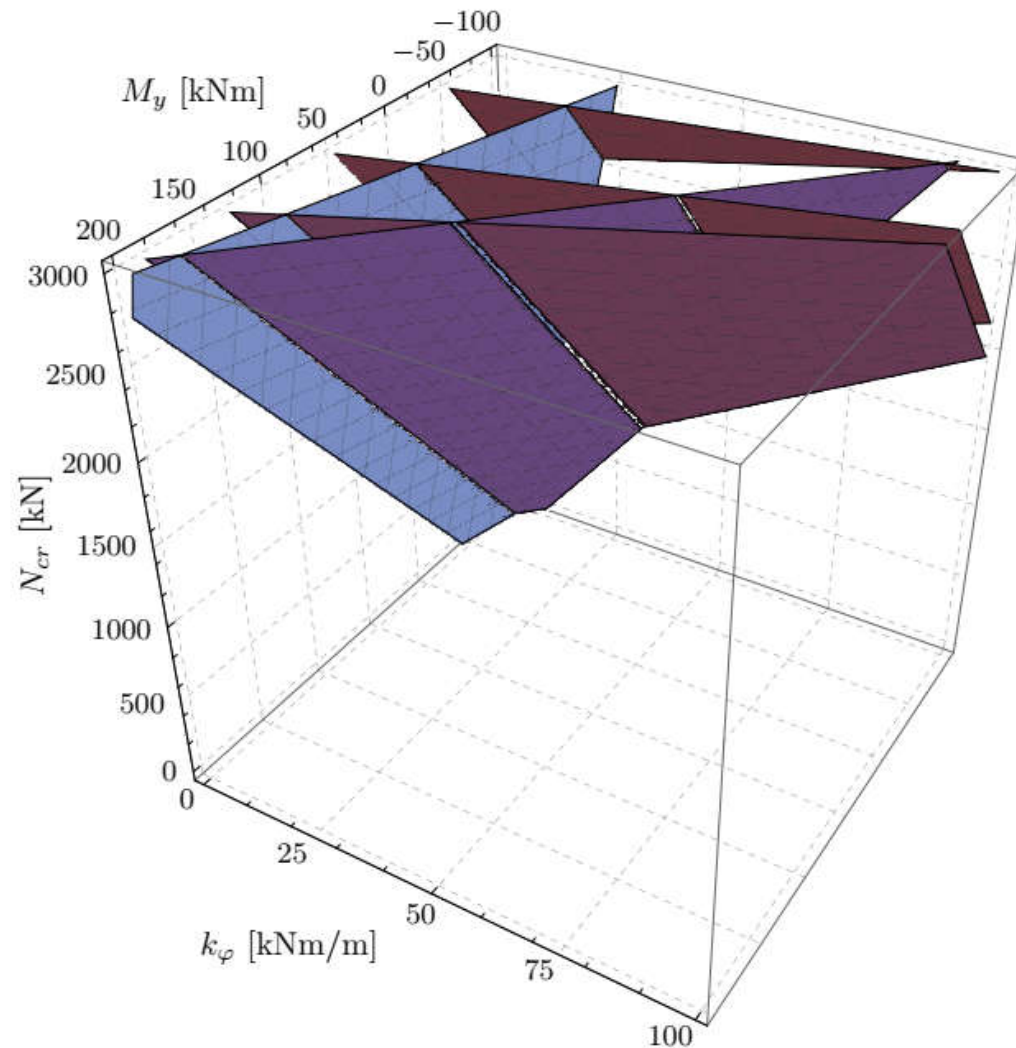
MODEL O ODCINKOWO ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI



Rys. 6.11. Miejsca zerowe wyznacznika w funkcjach: a) momentu M_y i siły osiowej N , b) podatności ośrodka k_φ i siły osiowej N , c) podatności ośrodka k_φ i momentu M_y

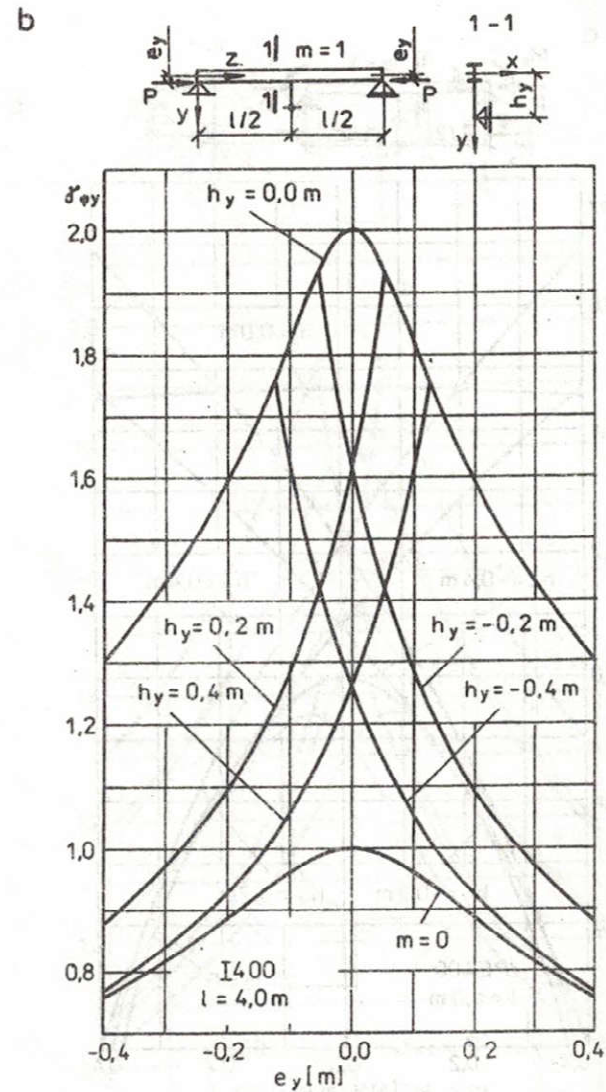
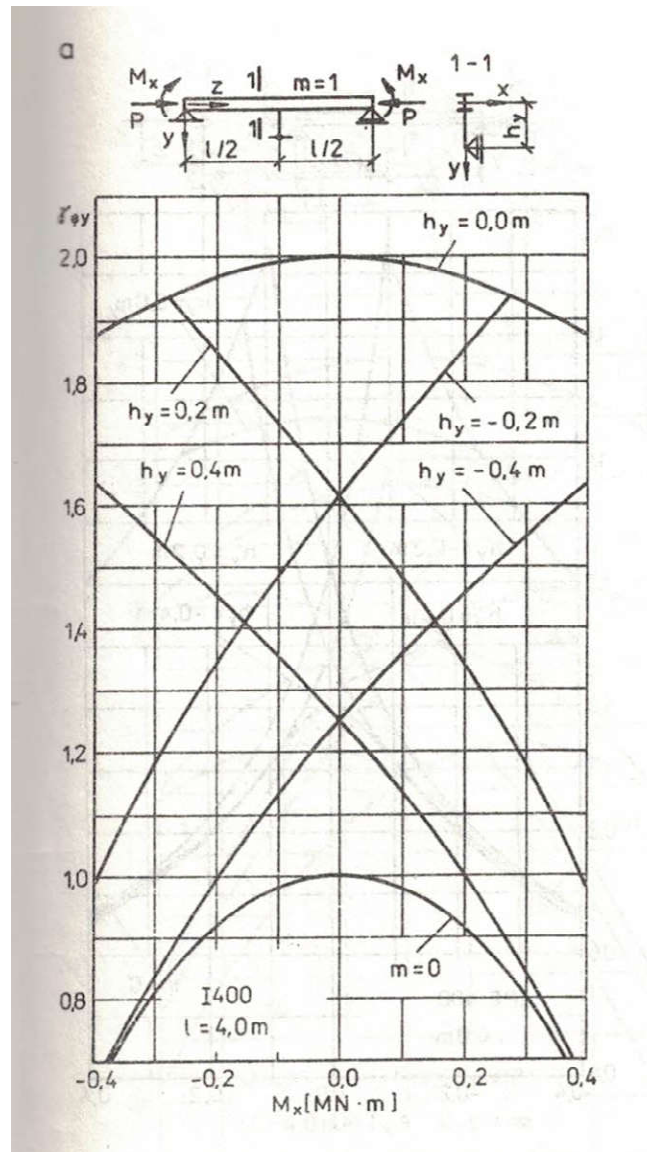
IPE 200, $l = 5$ m, $z_c = -0,1$ m

MODEL O ODCINKOWO ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI

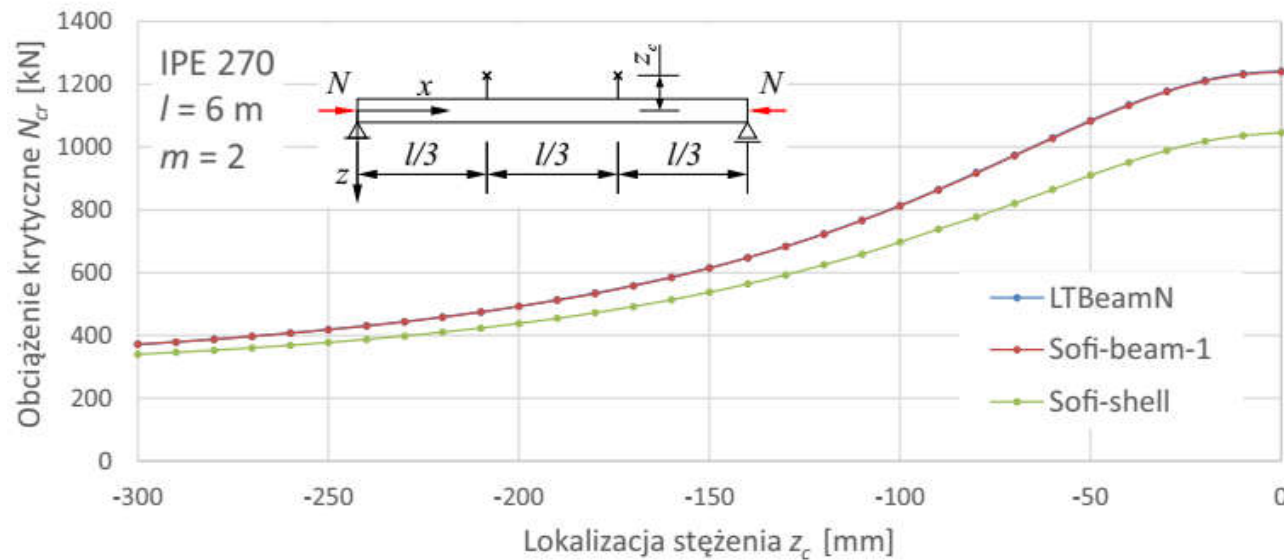
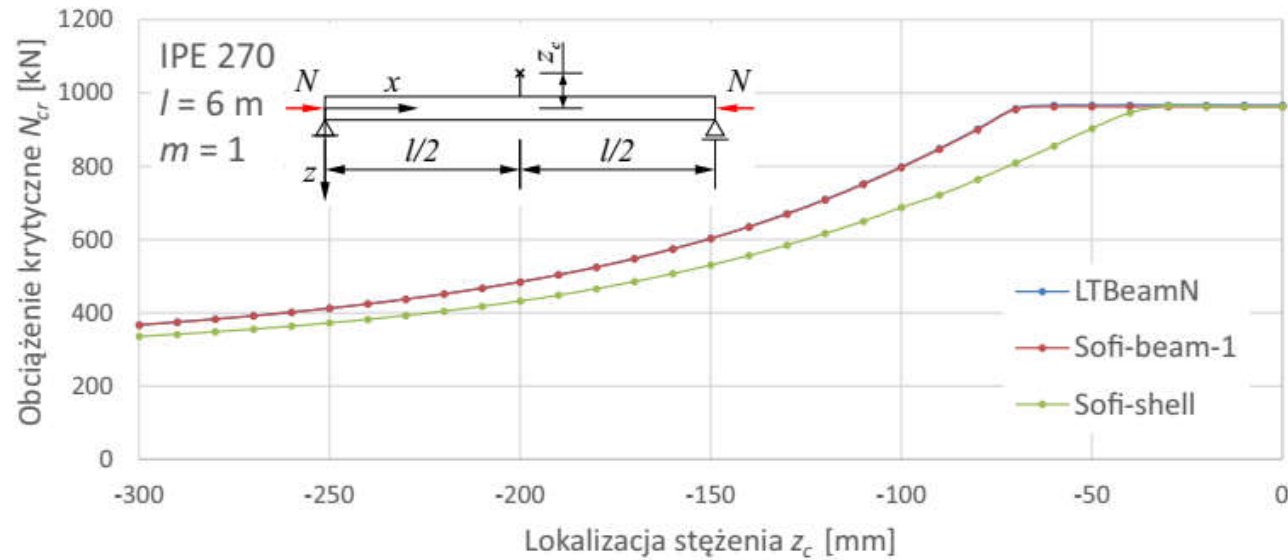


Rys. 6.12. Miejsca (płaszczyzny) zerowania się funkcji zmienności wyznacznika w przypadku trzech zmiennych N , M_y , k_φ

ELEMENTY PUNKTOWO STĘŻONE – WYB. G-S

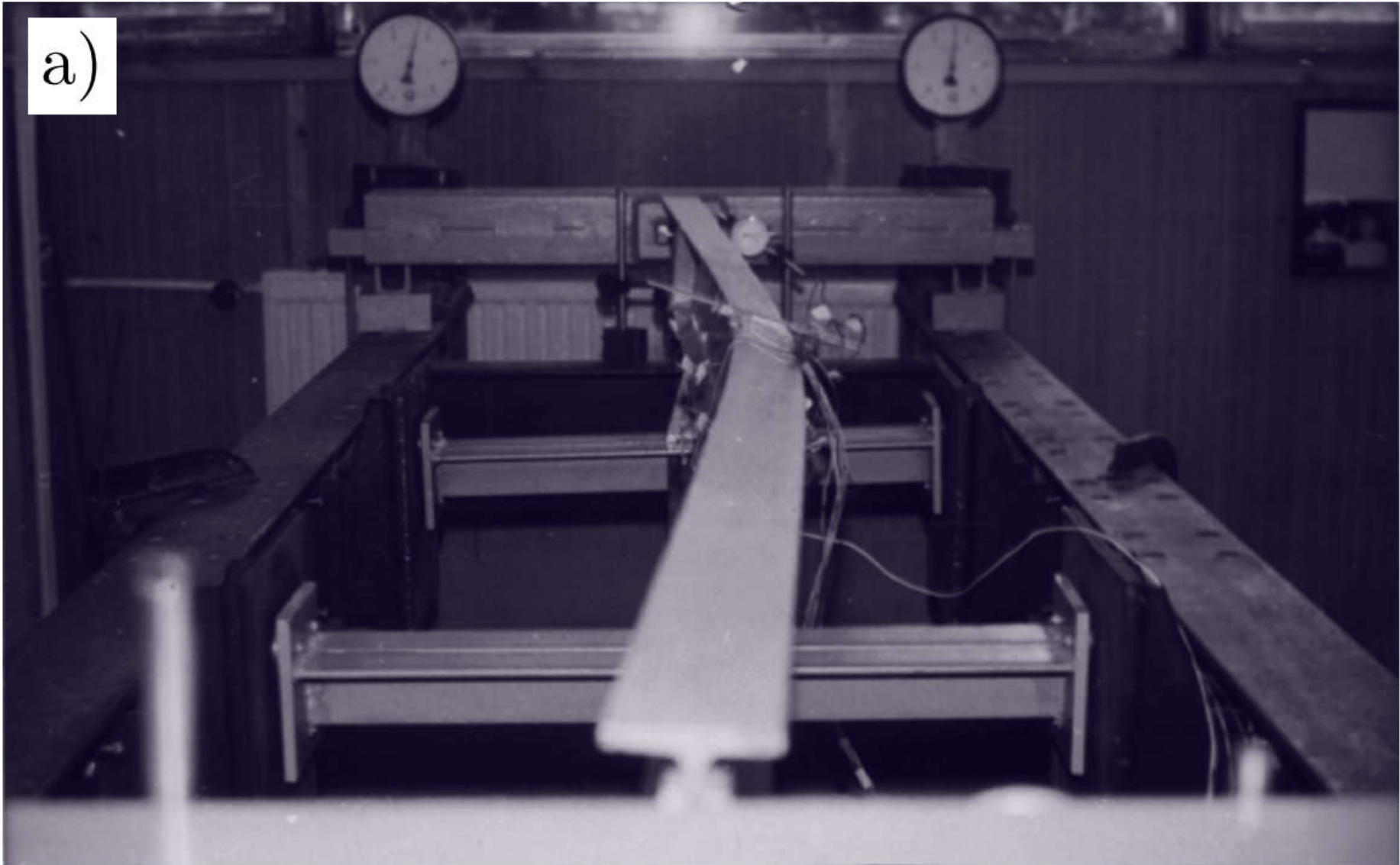


ELEMENTY PUNKTOWO STĘŻONE – WYB. G-S

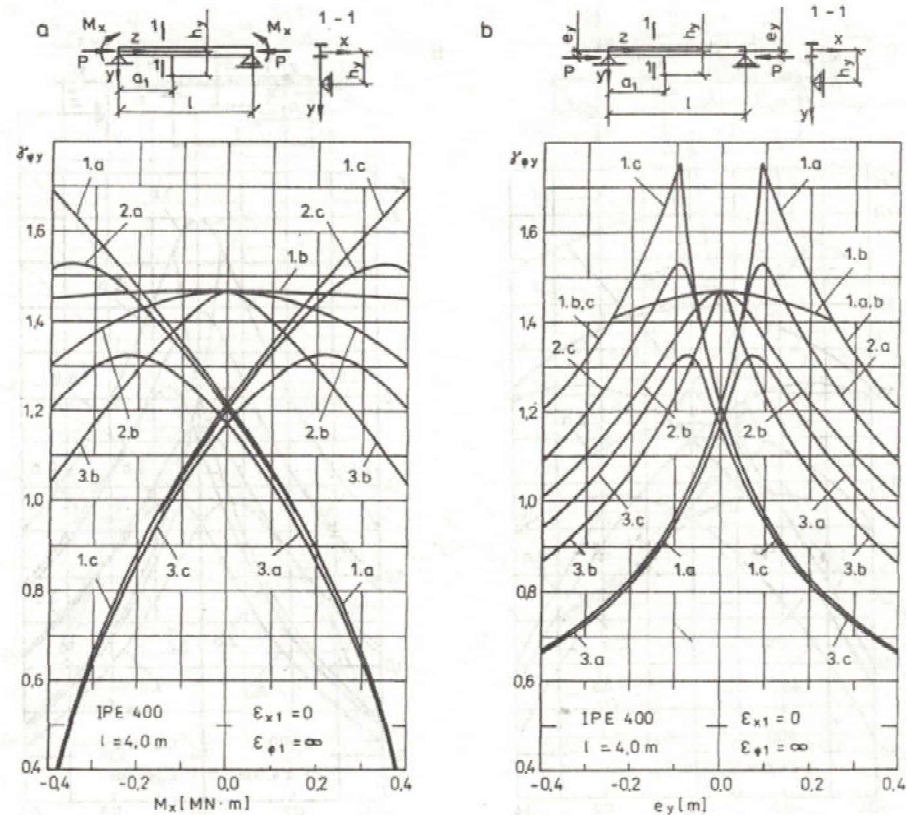


ELEMENTY PUNKTOWO STĘŻONE – WYB. G-S

a)



ELEMENTY PUNKTOWO STĘŻONE – WYB. G-S



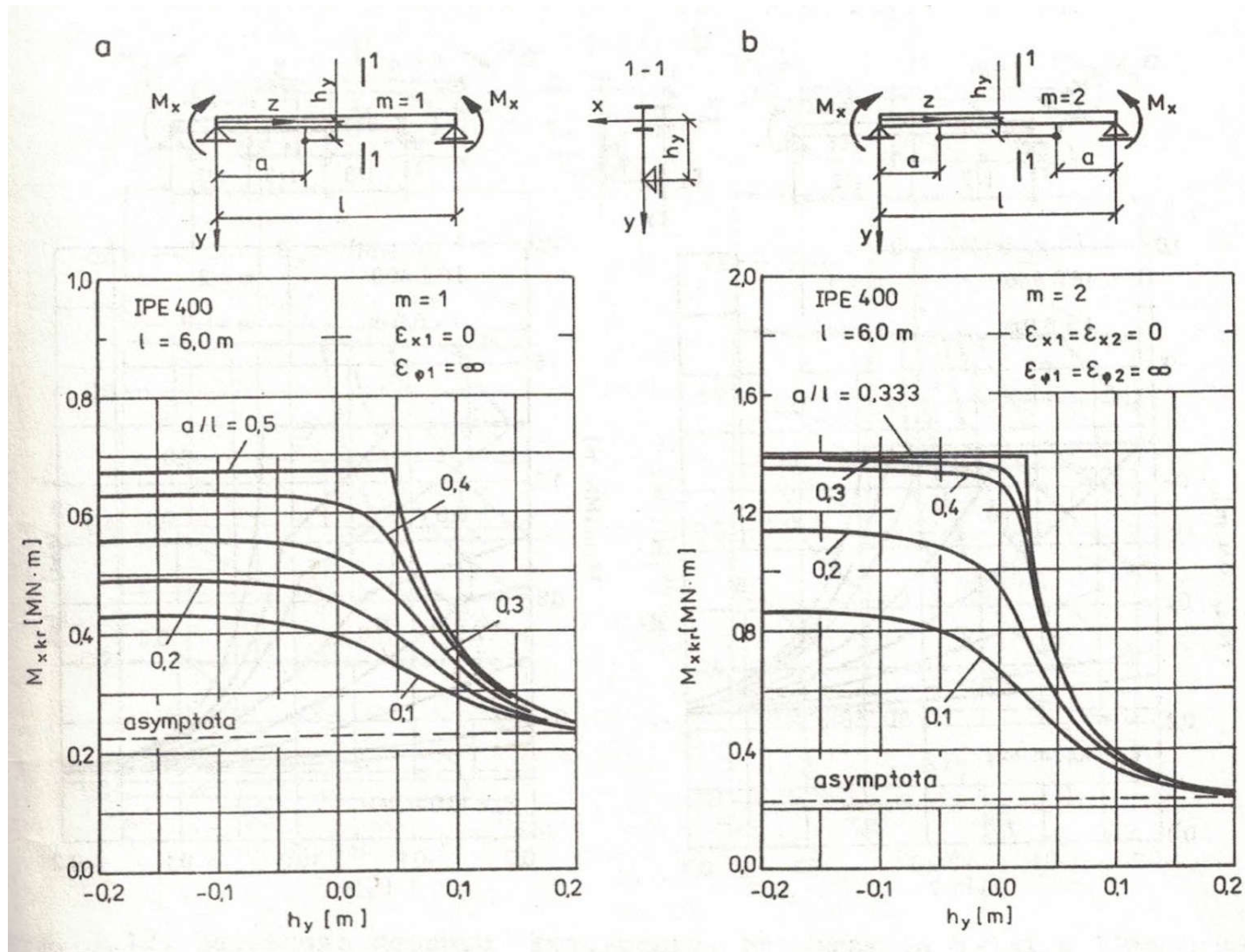
Rys. 3.6. Wpływ położenia na wysokości słupa pojedynczego stężenia poprzecznego (a_1), umieszczonego w odległości $h_{y1} = h_y$ od osi słupa wykonanego z IPE400, na obciążenia krytyczne wyboczenia giętno-skrętnego, w przypadku: a) ściskania i zginania, b) mimośrodkowego ściskania

Oznaczenia:

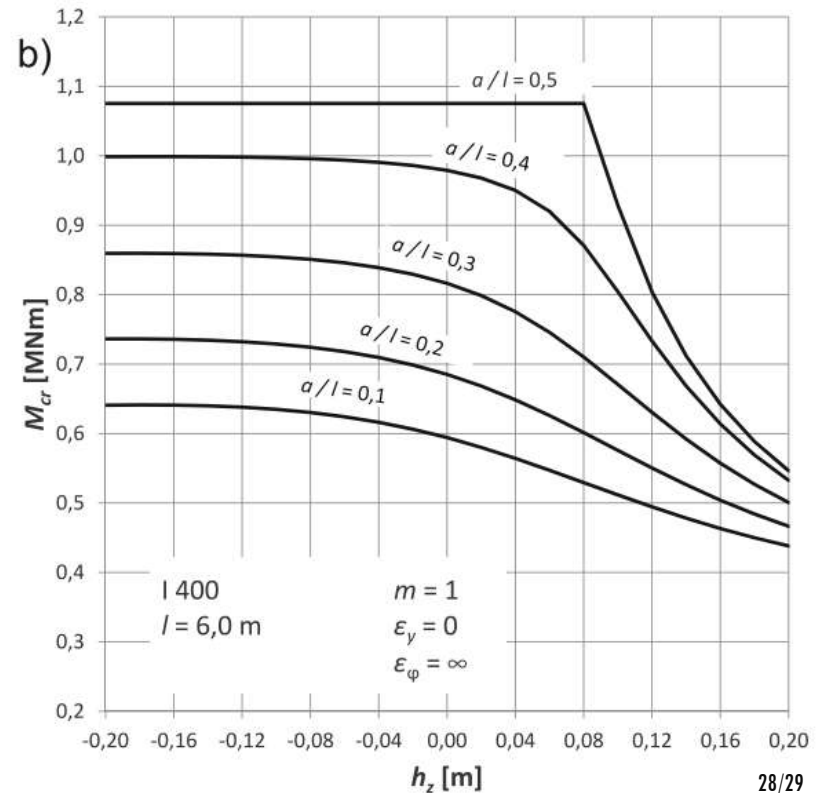
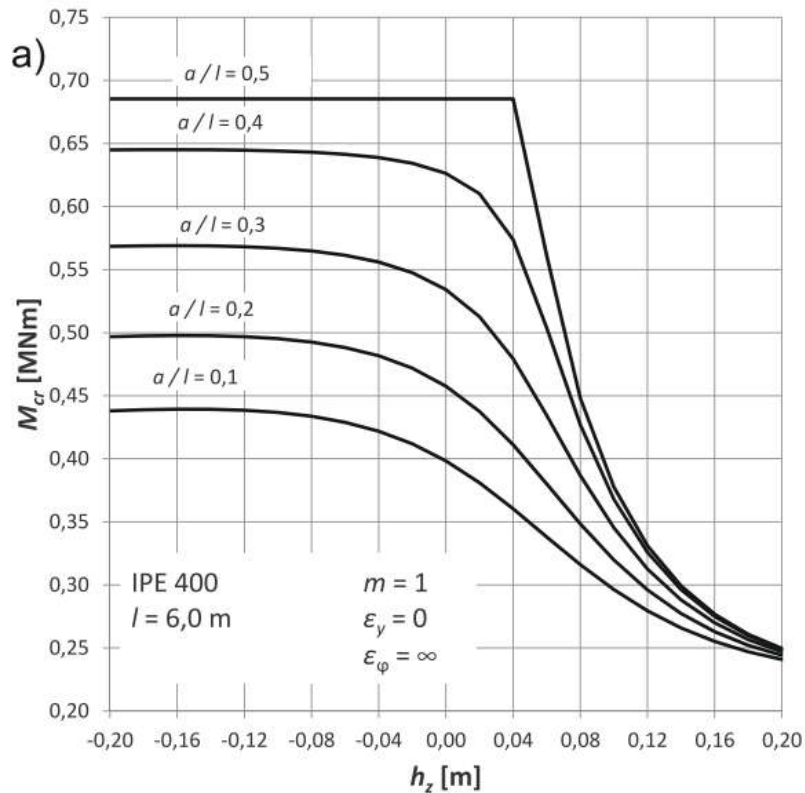
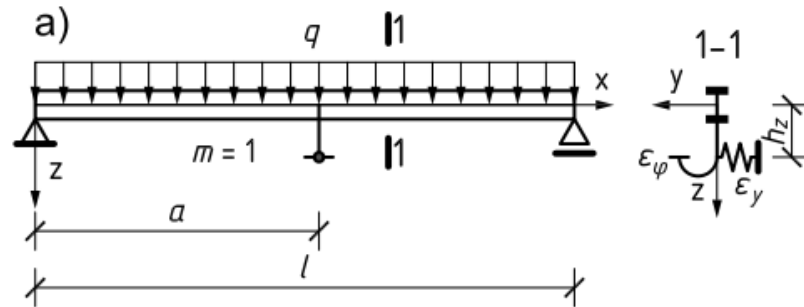
- | | | |
|-------------------|-------------|------------------|
| 1 - $a_1 = 0,5$ l | - h_y , m | a - $h_y = 0,2$ |
| 2 - $a_1 = 0,3$ l | | b - $h_y = 0,0$ |
| 3 - $a_1 = 0,1$ l | | c - $h_y = -0,2$ |

Fig. 3.6. The influence of the height at which a single lateral bracing (a_1) is placed on the column, with the bracing being placed at a distance of $h_{y1} = h_y$ from the axis of a column made of IPE400, on the critical load of flexural-torsional buckling, in the cases of: a) compression and bending, b) eccentric compression

ELEMENTY PUNKTOWO STĘŻONE – ZW.



ELEMENTY PUNKTOWO STĘŻONE – ZW.



ELEMENTY PUNKTOWO STĘŻONE – ZW.

